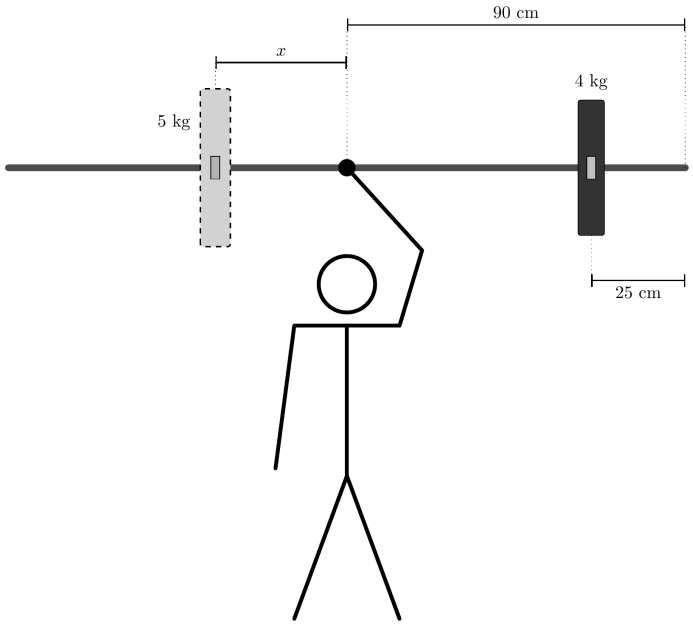
Tyngdpunkten 2026

Svårare

November 2026

Varje uppgift kan ge högst 10 poäng. På uppgifter med flera deluppgifter kan poäng ges för en deluppgift även om de tidigare inte är lösta. Välmotiverade grafiska lösningar ger alltid full poäng. Lycka till!

1. Enhänt gymbro Nico har gymmat mycket på senaste tiden och har nu börjat köra militärpress med endast högerarmen, med handen mitt på stången. På stången sitter redan en viktplatta på 4 kg på högersidan. Han vill nu lägga på ytterligare en viktplatta på 5 kg på vänstersidan av stången. Anta att hans hand bara kan trycka rakt uppåt på stången och inte kan vrida den. Handen och viktplattornas placeringar visas i figur 1. På vilket avstånd x från handen ska han placera den nya viktplattan för att stången ska balansera?[1]



Figur 1: Nicos militärpress med endast högerarmen. Den streckade viktplattan är den nya. Figuren är inte skalenlig.

2. Neutron + stjärna = sant I vanliga fall sönderfaller fria neutroner enligt följande reaktion:

$$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

I neutronstjärnor är trycket så högt att denna reaktion inte kan ske. På grund av den mycket starka gravitationen sker i stället en annan reaktion, något som kallas elektroninfångning:

$$p^+ + e^- \to n + \nu_e$$

Protonens, neutronens och elektronens massor är $m_p = 1{,}007276$ u, $m_n = 1{,}008664$ u och $m_e = 0{,}00054858$ u. Neutrinons massa är inte känd exakt, men ligger någonstans mellan 0 och $5 \cdot 10^{-10}$ u.[2] Beräkna den minsta möjliga hastigheten som en elektron måste ha för att elektroninfångning ska kunna ske, givet att protonen är i vila.

Ledning: Vid dessa hastigheter måste den relativistiska formeln för rörelseenergi användas:

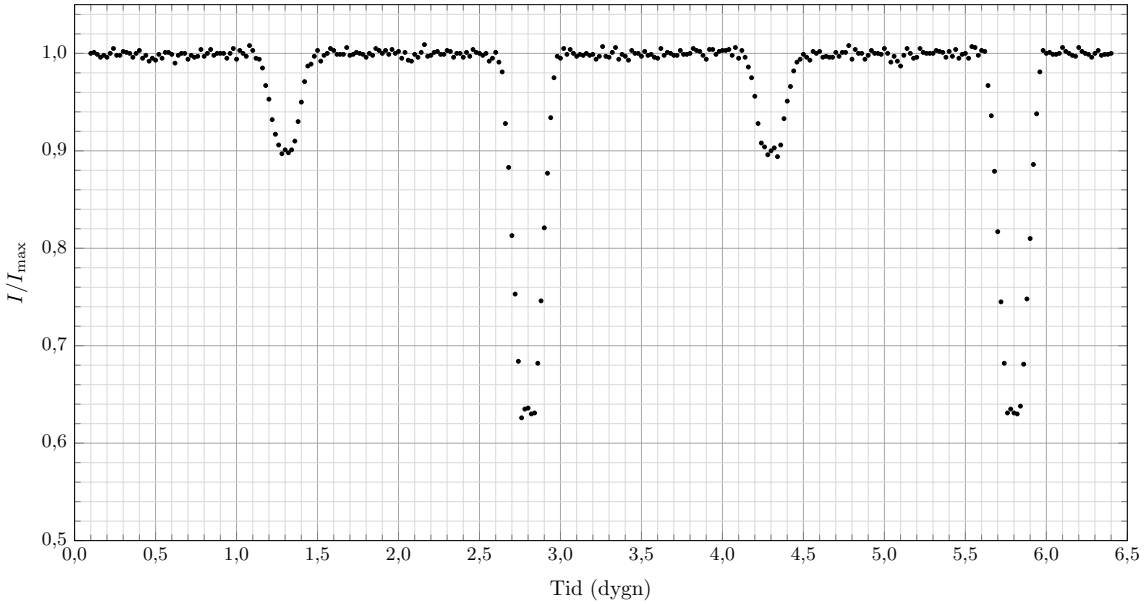
$$E_k = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) mc^2.$$

[1] Nico är så stark att vikten inte är något problem. Det svåra är att hålla stången i balans.

[2] Länge trodde man att neutriner saknar massa. År 2015 fick Takaaki Kajita och Arthur B. McDonald Nobelpriset i fysik för att ha visat att neutriner kan byta mellan olika typer, något som bara är möjligt om de har massa. Exakt hur stor massan är vet man fortfarande inte.

3. Doing doing doing Två små kroppar, båda med massan m, kan glida friktionsfritt längs en fast ring. Två fjädrar, båda med fjäderkonstanten k, är trädda på ringen så att de följer dess form. Fjädrarna är fästa i kropparna men inte i ringen. När kropparna förs lite närmare varandra trycks den ena fjädern ihop medan den andra dras ut. När kropparna sedan släpps börjar de svänga fram och tillbaka. Vad blir periodtiden för svängningen? Du behöver inte ta hänsyn till tyngdkraften.

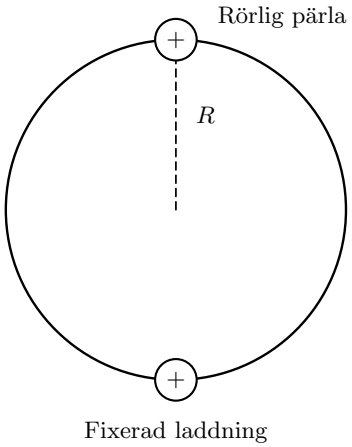
4. Förmörkelsevariabel Två stjärnor rör sig i cirkulära banor kring sin gemensamma tyngdpunkt med konstant vinkelhastighet, och vi befinner oss exakt i banplanet.[3] Stjärnornas absoluta yttemperaturer är T_1 och T_2, där $T_1 > T_2$, och deras radier är R_1 och R_2, där $R_1 > R_2$. Figur 2 visar den från jorden uppmätta intensiteten I från stjärnsystemet som funktion av tiden, uttryckt som andel av den största uppmätta intensiteten $I_{\max}$. Betrakta stjärnorna som svarta kroppar och anta att varje stjärna syns från jorden som en jämnt lysande skiva. Bestäm kvoterna T_1/T_2 och R_1/R_2.



Figur 2: Stjärnsystemets uppmätta relativa intensitet som funktion av tiden.

5. As all things should be Du har ett cirkulärt, stelt armband med en pärla som kan glida friktionsfritt längs armbandet. Armbandets radie är R, pärlans massa är m och pärlan är liten i förhållande till armbandet. När armbandet hålls fast i upprätt läge kan du balansera pärlan en kort stund högst upp på armbandet, men minsta förskjutning gör att pärlan faller ned. För att lösa detta placerar du en liten kula med den positiva laddningen Q vid armbandets botten och ger pärlan den positiva laddningen q, se figur 3. Hur stor måste laddningen q minst vara för att pärlan ska kunna balansera stabilt högst upp på armbandet?

Ledning: Du kan behöva använda approximationerna $\sin\theta \approx \theta$ och $\cos\theta \approx 1$, som båda gäller för små vinklar θ.

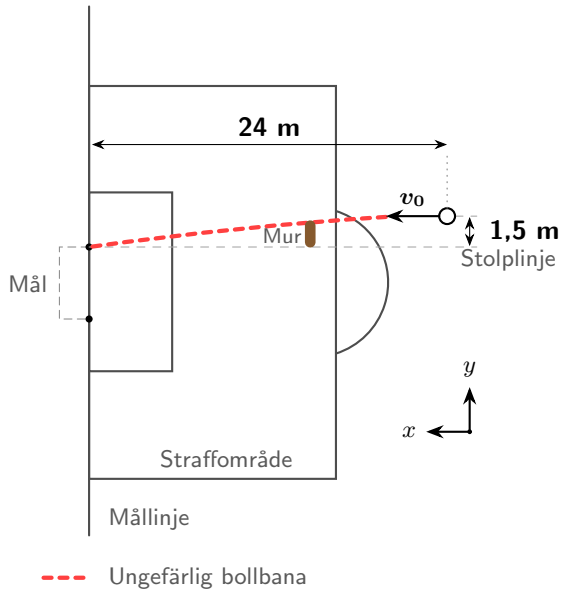


Figur 3: Armbandet med pärlan högst upp och den fixerade laddningen längst ned.

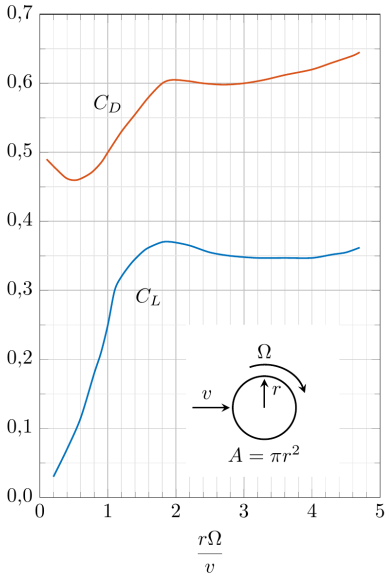
[3]Stjärnornas rörelse sker helt och hållet i ett tvådimensionellt plan i rymden. Detta plan kallas för *banplanet*.

6. Och det är måååållll!!! En boll som färdas genom luften medan den roterar påverkas, förutom av luftmotståndet, av en kraft vinkelrätt mot rörelseriktningen, den så kallade *Magnuskraften*. För en boll som roterar kring en lodrät axel, som vid en skruvad frispark, pekar Magnuskraften åt sidan och får bollen att svänga. Storleken på luftmotståndet och Magnuskraften bestäms av en luftmotståndskoefficient C_D respektive en lyftkraftskoefficient C_L, som båda beror på bland annat rotationshastigheten Ω (i rad/s). Sambandet visas i figur 4b.
En frispark skjuts från 24 meters avstånd med farten $v_0 = 25$ m/s rakt i x-led. För att undvika motståndarlagets mur skruvas bollen så att den svänger 1,5 m åt vänster, och det blir stolpe in.[4] En skiss av målet visas i figur 4a. En fotboll ska enligt officiella regler ha omkretsen 69 cm och massan 430 g. Luftens densitet är 1,3 kg/m^3. Vilken rotationshastighet hade bollen när den sparkades? Luftmotståndet kan försummas.[5]

Ledning: Magnuskraftens storlek kan beskrivas med formeln $F_L = \frac{1}{2} C_L \rho A v^2$, där ρ är luftens densitet, A är bollens tvärsnittsarea och v är bollens fart.



(a) Skiss av frisparken sedd uppifrån. Figuren är inte skalenlig.



(b) Luftmotståndskoefficienten C_D och lyftkraftskoefficienten C_L för en roterande sfär som funktion av $r\Omega/v$.

Figur 4: Frisparken och koefficienterna för en roterande sfär.

7. Slangbella Bella vattnar sina blommor med en vattenslang. Slangen har innerradien r_0 och är riktad snett uppåt med vinkeln α mot marken. Bestäm vattenstrålens radie i strålens högsta punkt. Försumma luftmotståndet och anta att vattenstrålen håller ihop under hela färden.

[4] Ett liknande mål gjordes av Nathan Saliba i matchen mellan Kanada och Qatar i årets VM, ett mycket snyggt mål!
[5] Detta är en förenkling. I verkligheten bromsas bollen märkbart på vägen mot målet, så svaret blir bara en uppskattning.

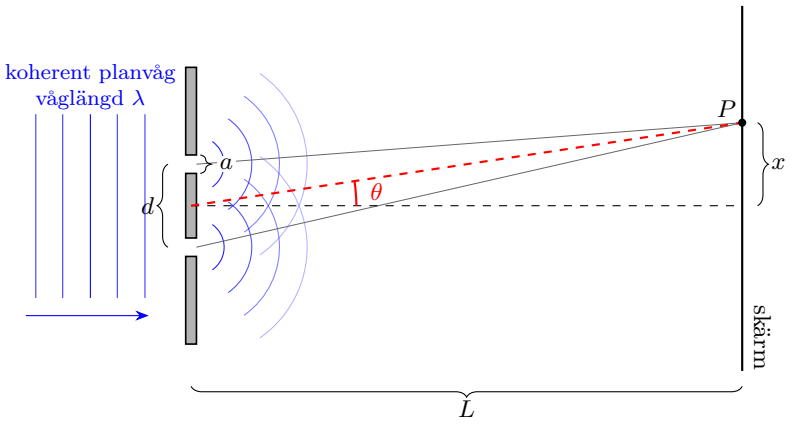
8. Youngs dubbelspaltsexperiment År 1801 visade Thomas Young att ljus beter sig som en våg. I den klassiska versionen av hans försök får ljus av en enda våglängd passera två smala, parallella spalter med spaltbredden a och spaltavståndet d, se figur 5. Figur 6 och figur 7 visar resultatet från en sådan uppställning.
Om man i samma uppställning täcker över den ena spalten fördelas ljuset på skärmen i stället enligt[6]

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \qquad \beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda},$$

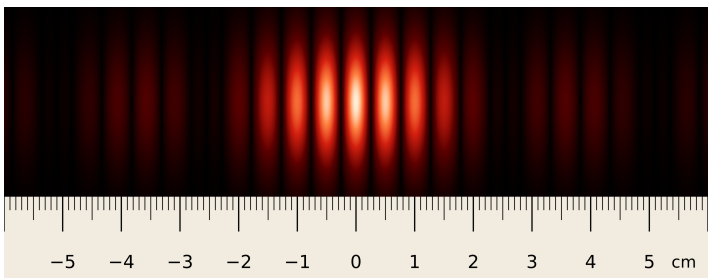
där I_0 är intensiteten mitt i mönstret. Detta ger intensitetsminima i de riktningar där

$$a \sin \theta = m\lambda, \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

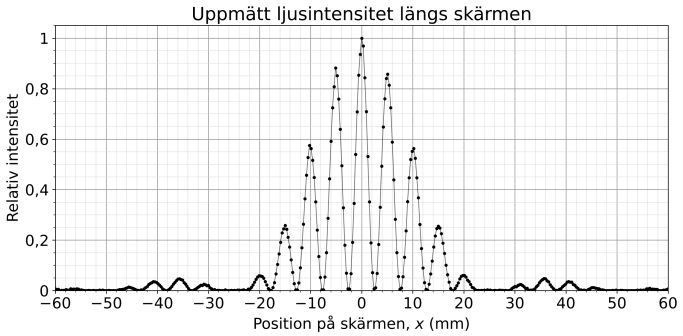
Bestäm kvoten d/a.



Figur 5: Youngs dubbelspaltsexperiment. En koherent planvåg med våglängden λ faller in mot två spalter med bredden a, vars mittlinjer ligger på avståndet d från varandra. Ljuset från spalterna når punkten P på skärmen, som står på avståndet L från spalterna. Punkten P ligger på avståndet x från mönstrets mitt och syns från spalterna under vinkeln θ. Figuren är inte skalenlig.



Figur 6: Ljusmönstret på skärmen. Linjalens skala är i centimeter.

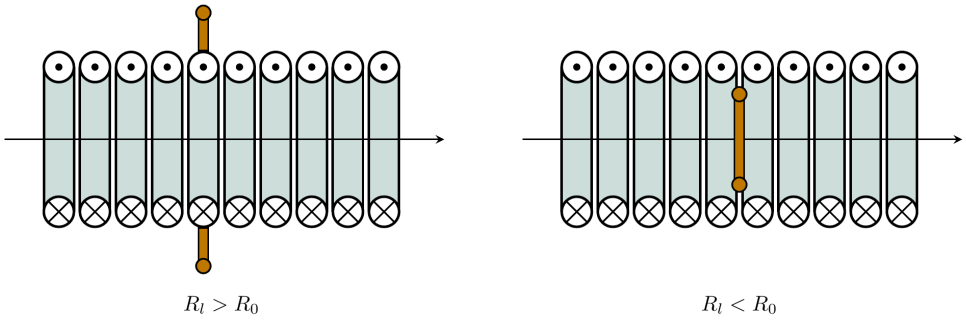


Figur 7: Uppmätt relativ ljusintensitet som funktion av positionen x på skärmen, räknat från mönstrets mitt.

[6] Uttrycket kan verka oroande, eftersom det innebär division med noll då $\beta = 0$. Man kan dock visa att $\lim_{\beta \to 0} \sin \beta / \beta = 1$.

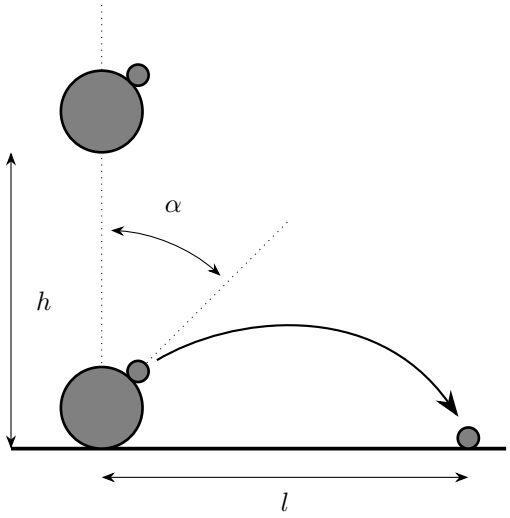
9. Maxwells armband En lång spole (längden $\ell \gg R_0$) med radien R_0 och vindningstätheten 0,5 varv/mm leder strömmen $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$, där $I_0 = 2$ A och $\omega = 50$ rad/s. Ett tvärsnitt av spolen visas i figur 8, med strömriktningarna markerade i ett ögonblick då strömmen är positiv. En slinga med ett varv och resistansen $R = 1\,\Omega$ är antingen virad runt spolen (slingans radie $R_l > R_0$, vänstra bilden) eller placerad inuti spolen ($R_l < R_0$, högra bilden). Slingans plan är vinkelrätt mot pilen, som anger spolens längdriktning, och slingans centrum sammanfaller med spolens centrum. Bestäm den inducerade strömmens maximala värde i de båda fallen. Uttryck svaren i R_0 respektive R_l.

Ledning: Magnetfältets storlek inuti en lång spole ges av $B = \mu_0 nI$, där μ_0 är den magnetiska konstanten, n är vindningstätheten och I är strömmen genom spolen. Utanför spolen är magnetfältet noll.



Figur 8: Tvärsnitt av spolen med slingan (gul) utanför spolen (vänster) och inuti spolen (höger). Pilen anger spolens längdriktning.

10. Bowlargolf En bowlare försöker lista ut hur man spelar golf. Hon släpper därför en bowlingboll och en golfboll tillsammans från höjden h ovanför en plan yta. Bowlingbollen väger mycket mer än golfbollen, och båda har radier som är mycket mindre än h. Bowlingbollen studsar mot ytan och kolliderar omedelbart därefter med golfbollen. Bollarna släpps så att all rörelse är vertikal innan bollarna kolliderar med varandra, och golfbollen träffar bowlingbollen i vinkeln α från bowlingbollens högsta punkt, se figur 9. Alla kollisioner är elastiska och friktionen mellan bollarna kan försummas.
Efter kollisionen färdas golfbollen bort från bowlingbollen och landar på avståndet l från punkten där bowlingbollen träffade ytan. Luftmotståndet kan försummas. Höjden h är fixerad men vinkeln α kan väljas fritt. Vilket är det största avståndet l som kan uppnås, och för vilken vinkel α sker detta?

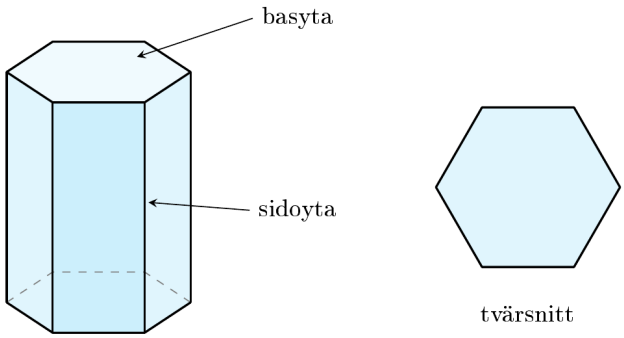


Figur 9: Uppställningen i bowlargolf, sedd från sidan.

11. Vinterns optiska magi En kall vinterdag kan man ibland se ljusa ringar runt solen, så kallade *haloringar*, se figur 10a. De vanligaste har vinkelradierna ungefär 22° och 46°.[7] Ringarna uppstår när solljus bryts i små iskristaller i luften. Kristallerna har formen av regelbundna sexsidiga prismor, se figur 10b, och är slumpmässigt orienterade. Is har brytningsindex $n = 1{,}31$, luften har brytningsindex 1 och solljuset kan antas vara parallellt.



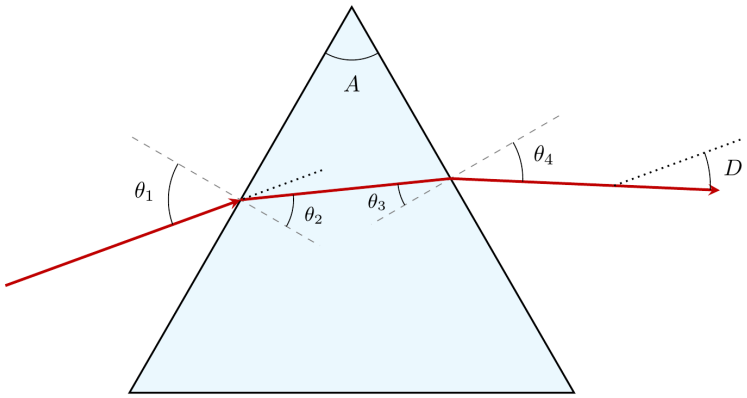
(a) Haloringar runt solen.



(b) En iskristall sedd från sidan och uppifrån.

Figur 10: Haloringar och iskristallerna som orsakar dem.

En stråle som går in genom en av kristallens ytor och ut genom en annan, utan att reflekteras inuti kristallen, bryts på samma sätt som i ett prisma: två plana ytor som bildar vinkeln A med varandra, se figur 11.



Figur 11: Strålgång genom ett prisma med vinkeln A mellan ytorna. De streckade linjerna är ytornas normaler.

a) En ljusstråle bryts in i ett prisma med infallsvinkeln θ_1 och ut med vinkeln θ_4, som i figur 11. Visa att avböjningen blir

$$D = \theta_1 - A + \arcsin\Big(n \sin\big(A - \arcsin(\sin\theta_1/n)\big)\Big).$$

Ledning: Med *avböjningen* D menas vinkeln mellan strålens ursprungliga och slutliga färdriktning, se figur 11. Du kan anta att strålgången ser ut som i figuren, och att strålen går rakt tvärs över prismat så att allt kan ritas i ett plan. Strålar som går snett genom prismat påverkar inte svaret i uppgiften.

b) Eftersom kristallerna är slumpmässigt orienterade träffar ljuset kristallerna med många olika infallsvinklar. Förklara varför ljuset ändå samlas kring en bestämd avböjning, och bestäm denna avböjning uttryckt i A och n.

Ledning: Du kan utan bevis använda att D, som funktion av θ_1, har exakt ett minimum.

c) Vilka värden kan A ha för en stråle som går in genom en av kristallens ytor och ut genom en annan? Visa att två av dessa ger ringarna på 22° och 46°, och förklara varför de övriga inte ger någon ring.

[7] Med vinkelradie menas vinkeln mellan riktningen mot solen och riktningen mot ringen, sett från den som tittar.