HÖJDPUNKTEN 2026

Öppen tävling den 20–21 mars 2026

Lösningsförslag

Problem 1. En mataffär har ett erbjudande: Köp minst fyra frukter och få den billigaste gratis. Den första kunden köper tre apelsiner och en banan. Den andra köper tre apelsiner och två citroner. Den tredje köper två bananer och två citroner. Det visade sig att alla dessa tre kunder fick betala exakt 35 kr för sina frukter. Hitta styckpriset för varje frukt.

Lösningsförslag. Låt a, b och c beteckna styckpriserna för apelsiner, bananer respektive citroner. Om $c \geq b$ så hade kund 2 betalat mer än kund 1 vilket de inte gör, alltså måste $b > c$. Om $a \geq b$ så hade kund 2 betalat mer än kund 3, alltså måste $b > a$. Vi drar därmed slutsatsen att bananerna dyrast av de tre frukterna. Kvar återstår att avgöra huruvida a eller c är störst. Kund 1 och 3 betalar $2a + b$ respektive $b + 2c$ för sina frukter. Om $c > a$ så blir

$$35 = 2a + b < 2c + b < b + 2c = 35$$

vilket inte är möjligt, alltså är $a \geq c$. Nu har vi listat ut prisordningen av frukterna, så vi vet alltså hur många frukter av varje sort varje kund behöver betala för. Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2a + b = 35 & (1) \\ 3a + c = 35 & (2) \\ 2b + c = 35 & (3) \end{cases}$$

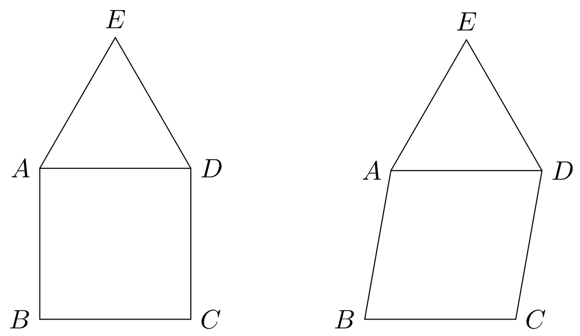
Från (1) och (2) får vi att $b = 35 - 2a$ och $c = 35 - 3a$. Vi substituerar in detta i (3) och får

$$\begin{aligned} 2(35 - 2a) + (35 - 3a) &= 35 \\ \iff 105 - 7a &= 35 \\ \iff a &= \frac{105 - 35}{7} = 10. \end{aligned}$$

Alltså är $b = 35 - 20 = 15$ och $c = 35 - 30 = 5$.

Svar: Apelsinerna kostar 10 kr, bananerna kostar 15 kr och citronerna kostar 5 kr. □

Problem 2. Bilden visar en tvådimensionell modell av ett hus bestående av sex lika långa linjesegment. En kraftig vindpust har gjort att husets väggar (AB och CD) har börjat luta (med en avvikelse mindre än $30°$ från sina ursprungliga riktningar). Bevisa att vinkeln $\angle BEC$ inte beror på denna lutning, och bestäm vinkelns storlek.



Lösningsförslag. Låt $x = \angle AEB$, $y = \angle BEC$ och $z = \angle CED$. Triangeln $\triangle ADE$ är liksidig, därmed är

$$x + y + z = \angle AED = 60°. \quad (*)$$

Vi har också att

$$x = \angle ABE = \angle ABC - \angle EBC$$

$$z = \angle DCE = \angle DCB - \angle ECB$$

Från vinkelsumman i triangeln $\triangle BCE$ får vi sedan

$$y = 180° - \angle EBC - \angle ECB$$

därmed

$$x + z - y = \angle ABC + \angle DCB - 180° = 0 \quad (**)$$

där vi använde att summan av närliggande vinklar i en romb ($\square ABCD$) är $180°$. Sist subtraherar vi $(**)$ från $(*)$ och får

$$2y = 60°,$$

det vill säga $y = 30°$. $\square$

Problem 3. Hitta alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} p+q+r=s \\ p+2q+3r=5t \end{cases}$$

där p, q, r, s och t är primtal.

Lösningsförslag. Om vi subtraherar den första ekvationen från den andra så får vi

$$q+2r=5t-s.$$

Både s och t är självfallet större än 2, och därmed udda, alltså är högerledet udda − udda = jämnt. Detta innebär att q är jämnt, det vill säga $q=2$.

I första ekvationen ser vi nu att $p+r$ måste vara udda. Detta ger två fall:

Fall 1 $p=2$ och $r=$udda: Den andra ekvationen blir

$$2+4+3r=5t.$$

Men vänsterledet är en multipel av 3, alltså måste $t=3$, och därmed $r=(15-4-2)/3=3$. Första ekvationen ger sedan $s=7$. Med insättning ser vi att detta löser ekvationssystemet.

Fall 2 $p=$ udda och $r=2$: Den andra ekvation blir nu

$$p+4+6=5t \iff p=5t-10$$

Högerledet är nu en multipel av 5, därmed måste $p=5$ och $t=3$. Men om vi stoppar in detta i första ekvationen får vi $s=5+2+2=9$, vilket inte är ett primtal.

Svar: Ekvationssystemet har endast en lösning, nämligen $(p,q,r,s,t)=(2,2,3,7,3)$.

□

Problem 4. Låt n vara ett positivt heltal. I det gamla slottet arbetar den kungliga glasmästaren med att skapa ett nytt fönster till tronhallen. Hon måste placera $\frac{1}{2}n(n+1)$ lila glasrutor och $\frac{1}{2}n(n-1)$ gula glasrutor i ett rutnät på $n \times n$ rutor så att inga två rader har samma antal lila rutor och inga två kolumner har samma antal lila rutor. På hur många sätt kan hon göra detta?

Lösningsförslag. Notera att ingen rad/kolumn kan ha 0 lila rutor, eftersom de resterande $n-1$ raderna/kolumnerna då som mest skulle kunna ha $\sum_{i=2}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)-1 < \frac{1}{2}n(n+1)$ lila rutor. Därmed måste raderna ha $1, \ldots, n$ lila rutor i sig i någon ordning, och liknande för kolumnerna.

Notera att ett fönster som uppfyller villkoren kan ha sina rader respektive kolumner permuterade hur som helst och fortfarande uppfylla villkoren. Vi hävdar att antalet fönster som uppfyller villkoren är $(n!)^2$. Därmed räcker det att visa att det finns exakt ett fönster som har i lila rutor i den i:te kolumnen från vänster och j lila rutor i den j:te raden nerifrån för varje $1 \leq i, j \leq n$.

Genom induktion på k kan det visas att kolumn $n+1-k$ har de nedre $n+1-k$ rutorna lila och de övre $k-1$ rutorna gula. Basfallet $k=1$ är uppenbart, eftersom kolumn n måste ha n lila rutor i sig. Induktionssteget följer från att de översta $k-1$ raderna redan har tillräckligt många lila rutor i kolumnerna $\{n+2-k, \ldots, n\}$, och att de översta $k-1$ rutorna i kolumn $n+1-k$ därför måste vara gula, vilket forcerar de nedre $n+1-k$ rutorna att vara lila.

Därmed finns det exakt $(n!)^2$ sätt för den kungliga glasmästarinnan att skapa det nya fönstret. $\square$

Problem 5. Låt $\triangle ABC$ vara en rätvinklig triangel med $\angle ABC = 90°$ och $|AB| < |BC|$. Låt D vara en punkt på hypotenusan AC sådan att $|AB| = |BD|$. Punkten T ligger på sidan BC och är sådan att $\angle ATB = \angle CTD$. Visa att linjen genom D vinkelrätt mot BD delar sträckan CT på mitten.

Lösningsförslag. Låt A' vara reflektionen av punkten A över linjen BC. Då får vi att $\angle A'TB = \angle ATB = \angle CTD$, vilket implicerar att punkterna A', T och D är kolinjära.

Eftersom $|BA| = |BD| = |BA'|$ får vi att $\angle A'DA = 90°$ från Thales sats. Eftersom $\angle ABT + \angle TDA = 90° + 90° = 180°$ så är fyrhörningen $ABTD$ cyklisk.

Låt M vara mittpunkten av sträckan CT. Eftersom $\angle CDT = 90°$ ger Thales sats att $|MC| = |MD| = |MT|$. Slutligen, notera att

$$\angle MDB = \angle MDT + \angle TDB = \angle DTC + \angle TAB = \angle BTA + \angle TAB = 90°$$

så linjen genom D vinkelrät mot BD delar sträckan CT på mitten, som önskat. $\square$

Problem 6. En färgläggning av rutorna i ett $n \times n$ rutnät i färgerna röd och blå kallas för *elegant* om det är möjligt att gå mellan varje par av röda rutor, genom att gå mellan rutor med en gemensam sida, utan att behöva gå igenom någon tredje röd ruta. Låt $R(n)$ vara det största möjliga antalet röda rutor som en *elegant* färgläggning av ett $n \times n$ rutnät kan ha. Bestäm

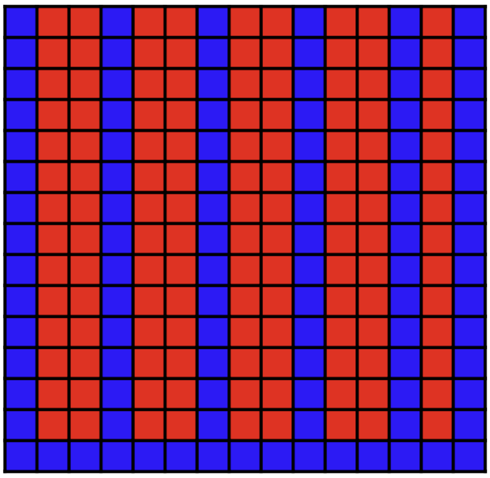
$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{n^2}.$$

Lösningsförslag. Vi hävdar att svaret är $\frac{2}{3}$.

Lemma 6.1. *För varje n gäller $R(n) \geq (n-1)\left\lceil \frac{2(n-2)}{3} \right\rceil$.*

Bevis. Låt oss beteckna rutor i rutnätet med koordinater (x, y) där x betecknar kolumnnummer och y radnummer, $\leq x \leq n-1$, $0 \leq y \leq n-1$. Vi hävdar att vi får en elegant färgläggning om vi färglägger punkten (x, y) enligt följande

$$\begin{cases} \text{blå} & \text{om } y = 0,\ x = 0,\ x = n-1, \text{ eller } x \text{ är delbart med } 3 \\ \text{röd} & \text{annars.} \end{cases}$$



Figur 1: Elegant färgläggning med $(n-1)\left\lceil \frac{2(n-2)}{3} \right\rceil$ röda rutor för $n = 15$.

Denna färgläggning är elegant eftersom man från varje röd ruta kan gå antingen höger eller vänster ett steg, och sedan ner till bottenraden som bara består av blå rutor. Från bottenraden kan man sedan på samma sätt ta sig till vilken annan röd ruta som helst, och man har bara passerat blå rutor. Vi hävdar nu att denna färgläggning använder minst $\frac{2}{3}(n-1)(n-2)$ röda rutor. Mycket riktigt finns det $\left\lceil \frac{2(n-2)}{3} \right\rceil$ kolumner med röda rutor i denna färgläggning, och i varje sådan kolumn finns det $n-1$ röda rutor vilket ger $(n-1)\left\lceil \frac{2(n-2)}{3} \right\rceil$ röda rutor. Det kan finnas eleganta färgläggningar med fler röda rutor, men den färgläggning vi hittat visar att $R(n)$ måste vara minst $(n-1)\left\lceil \frac{2(n-2)}{3} \right\rceil$. $\square$

Lemma 6.2. *För alla n gäller $R(n) \leq \frac{2}{3}n^2 + 2$*

Bevis. Antag att vi har en elegant färgläggning av ett $n \times n$ rutnät. Vi kan se att lemmat stämmer om $n = 1$ eller $n = 2$. Från och med nu antar vi att $n \geq 3$ och vi delar in i två fall.

(i) Alla röda rutor har minst två blå grannar. Låt E_{RB} vara antalet kanter mellan röda rutor och blå rutor. Från antagandet vi gjort får vi att $E_{RB} \geq 2r$, där r är antalet röda rutor. Samtidigt får vi $E_{RB} \leq 4b$, där b är antalet blå rutor, eftersom varje blå ruta kan ha som mest 4 röda grannar. Vi får alltså $4b \geq 2r \iff 2b \geq r$. Detta betyder att högst två tredjedelar av alla rutor kan vara röda, det vill säga $r \leq \frac{2}{3}n^2$

(ii) Det finns en röd ruta med exakt en blå granne. Låt oss säga att den röda rutan har koordinater (x_0, y_0). Eftersom vi antagit att färgläggningen är elegant måste man kunna gå från (x_0, y_0) till alla röda rutor utan att passera någon tredje röd ruta. Man kan självklart gå direkt från (x_0, y_0) till dess 3 röda granar utan att passera någon tredje röd ruta, men för att ta sig till någon annan röd ruta måste man passera den enda blå grannen till (x_0, y_0). Den blå grannen måste alltså vara en del av ett sammanhängande område (man kan gå mellan alla rutor i området utan att passera någon ruta utanför området) av blå rutor som angränsar till alla röda rutor utom möjligtvis de 3 röda grannarna till (x_0, y_0). Låt oss beteckna detta område B och låt oss anta att det innehåller b_1 blå rutor. Låt E vara antalet kanter mellan blå rutor i B. Eftersom B är sammanhängande gäller $E \geq b_1 - 1$, ett känt resultat inom grafteori. Vi hävdar nu att $2E + r - 3 \leq 4b_1$. För en ruta z låter vi $g_b(z),\ g_r(z),\ g(z)$ vara antalet blå, röda, respektive det totala antalet grannar till z. Då gäller

$$2E + r - 3 \leq \sum_{z \in B} g_b(z) + \sum_{z \in B} g_r(z) = \sum_{z \in B} g(z) \leq 4b_1.$$

Alltså får vi

$$2(b_1 - 1) + r - 3 \leq 4b_1 \implies r \leq 2b_1 + 5 \leq 2b + 5,$$

där b är det totala antalet blå rutor. Genom att addera $2r$ till båda sidor, och att utnyttja $r + b = n^2$, får vi

$$3r \leq 2n^2 + 5 \iff r \leq \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{3} \leq \frac{2}{3}n^2 + 2$$

(iii) Någon röd ruta saknar blå grannar. Det kan då finnas som mest 5 röda rutor eftersom den röda rutan utan blå grannar måste vara granne med alla andra röda rutor. För $n \geq 3$ gäller $5 \leq \frac{2}{3}n^2 + 2$.

Vi har visat att det aldrig kan finnas fler än $\frac{2}{3}n^2 + 2$ röda rutor i en elegant färgläggning av ett $n \times n$ rutnät, vilket bevisar lemmat. $\square$

Från lemma 6.1 och 6.2 följer det direkt att

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R(n)}{n^2} = \frac{2}{3}.$$

$\square$

Problem 7. I Tallandet har alla städer ett positivt heltal som namn. Två invånare i Tallandet kan endast brevväxla om de bor i olika städer vars namn skiljer sig åt med en tvåpotens (notera att två invånare som bor i samma stad inte kan brevväxla). Givet att Tallandet har n invånare, vad är det största möjliga antalet par av invånare i Tallandet som kan brevväxla?

Lösningsförslag. Låt $f(n)$ beteckna det största möjliga antalet par av invånade i Tallandet som kan brevväxla. Vi hävdar att $f(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$.

Lemma 7.1. $f(n) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$.

Bevis. Låt det bo $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ invånare i stad 1, $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ invånare i stad 2 och $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ invånare i stad 3. □

Lemma 7.2. $f(n) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$.

Bevis. Antag att invånarna i Tallandet har bosatt sig så att antalet par av invånare som kan brevväxla med varandra är maximalt. Låt A och B vara två bebodda städer vars invånare inte kan brevväxla med varandra, och så att en invånare i staden A kan brevväxla med åtminstone lika många invånare i Tallandet som en invånare i staden B. Om alla invånare i staden B flyttar till staden A så kommer det totala antalet par av invånare som kan brevväxla inte att minska.

Låt oss flytta invånarna i Tallandet på detta sätt tills dess att det går att brevväxla mellan alla par av bebodda städer. Vi hävdar att det efter dess kommer finnas som mest 3 bebodda städer i Tallandet.

Antag motsatsen, att det finns 4 eller fler bebodda städer i Tallandet så att det går all brevväxla mellan alla par av dessa städer. Låt fyra av dessa städer ha namn $a > b > c > d$. Då kommer $a - b$, $a - c$, $a - d$, $b - c$, $b - d$ och $c - d$ vara tvåpotenser. Eftersom summan av två tvåpotenser är en tvåpotens om och endast om tvåpotenserna som summerades är lika får vi att:

$$\begin{aligned}(a-b)+(b-c)=(a-c) &\implies (a-b)=(b-c)\\(b-c)+(c-d)=(b-d) &\implies (b-c)=(c-d)\\(a-c)+(c-d)=(a-d) &\implies (a-c)=(c-d)\end{aligned}$$

men detta skulle implicera att $(c - d) = (a - c) = (a - b) + (b - c) = 2(c - d)$, vilket är en motsägelse (då $c > d$).

Därför kan vi flytta invånarna i Tallandet, utan att antalet par av dem som kan brevväxla med varandra minskar, tills dess att de bor i som mest 3 olika städer. Låt det bo x, y och z invånare i dessa tre städer. Då finns det som mest

$$xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx\right) = \frac{1}{3}(x + y + z)^2 = \frac{n^2}{3}$$

par av invånare som kan brevväxla.

Därför måste $f(n) \leq \frac{n^2}{3} \implies f(n) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$. □

Därmed har vi visat att $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor \leq f(n) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor \implies f(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$. □

Problem 8. Matilda har ett udda primtal p och ett rutnät med n rader, där n är ett positivt heltal. På den k:te raden ($1 \leq k \leq n$) skriver hon ner siffrorna i talet kn i bas p, så att den i:te siffran (från höger) i talet hamnar i kolumn i för alla i.

Det visar sig att om Matilda väljer vilken kolumn som helst i rutnätet och summerar alla siffror som står i kolumnen är resultatet alltid delbart med p. Visa att p delar n.

Lösningsförslag. Notera att summan av siffrorna i kolumn $\ell+1$ är kongruent med följande uttryck modulo p:

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{kn}{p^\ell} \right\rfloor.$$

Antag att $p \nmid n$. Vi kommer nu visa att $p^m \mid n+1$ genom induktion på m. Basfallet $m = 0$ är uppenbart. För induktionssteget, antag att $p^m \mid n+1$. Då måste

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{kn}{p^m} \right\rfloor &= \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k(n+1)}{p^m} - \frac{k}{p^m} \right\rfloor \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n+1)}{p^m} - \left\lceil \frac{k}{p^m} \right\rceil \\
&= \frac{n(n+1)^2}{2p^m} + \frac{n+1}{p^m} - \sum_{k=1}^{n+1} \left\lceil \frac{k}{p^m} \right\rceil \\
&= \frac{n(n+1)^2}{2p^m} + \frac{n+1}{p^m} - p^m \left[\frac{\left(\frac{n+1}{p^m}\right)\left(\frac{n+1}{p^m}+1\right)}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{p^m}\right)\left(n^2+1-p^m\right)
\end{aligned}$$

vara delbart med p.

Om $\frac{n+1}{p^m}$ är delbart med p så är induktionssteget fullbordat. Annars måste n^2+1-p^m vara delbart med p. Om $m = 0$ ger detta att p delar n^2, en motsägelse. Om $m \geq 1$ så är n^2+1-p^m kongruent med 2 modulo p, och kan därför inte vara delbart med p. Därmed har vi visat induktionssteget.

Då får vi att $p^m \mid n+1$ för alla icke-negativa heltal m, vilket är en motsägelse till antagandet att $p \nmid n$. Därför måste n vara delbart med p, vilket var vad vi ville visa. $\square$

Problem 9. Ulrik vill synkronisera sina n klockor som alla har stannat, där n är ett udda positivt heltal. Alla Ulriks klockor har en 12-timmars urtavla med en timvisare och en minutvisare. Dessa minutvisare kan Ulrik justera fram eller bak med en hastighet på 10 varv per minut. I värsta fall, hur länge måste Ulrik vrida visare om han väljer klockslaget han synkroniserar sina klockor till på ett optimalt sätt?

Lösningsförslag. Vi hävdar att svaret är $0.3(n - \frac{1}{n})$ min.

Låt klockornas klockslag vara $a_1, \ldots, a_n \in S^1$ i den ordningen. Om Ulrik synkroniserar klockorna till klockslaget T kommer detta ta

$$1.2\,\mathrm{min} \cdot \sum_{i=1}^{n} |T - a_i|$$

där $|x - y|$ är avståndet mellan x och y på S^1.

Notera att $\mathbb{E}_k[|a_{k+i} - a_k|] \leq \frac{|i|}{n}$ för alla heltal i. Därmed är

$$\mathbb{E}_k\left[1.2\,\mathrm{min} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (|a_{k+i} - a_k| + |a_{k-i} - a_i|)\right] \leq 1.2\,\mathrm{min} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2i}{n} = 0.3\left(n - \frac{1}{n}\right) \mathrm{min}$$

så för något av klockslagen a_k tar det Ulrik som mest $0.3(n - \frac{1}{n})$ min att synkronisera alla sina klockor till det klockslaget.

För att visa att Ulrik inte kan göra bättre, betrakta fallet då $a_1, \ldots, a_n$ är jämnt utspridda runt S^1. Antag att Ulrik synkroniserar till klockslaget T. Betrakta de två klockslag a_k och a_{k+1} som är närmast $-T$. Då kommer $|T - a_{k+1-i}| + |T - a_{k+i}| = \frac{n+1-2i}{n}$ för varje $1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$, så tiden det tar att synkronisera till klockslaget T är

$$1.2\,\mathrm{min} \cdot \sum_{i=1}^{n} |T - a_i| \geq 1.2\,\mathrm{min} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n+1-2i}{n} = 0.3\left(n - \frac{1}{n}\right) \mathrm{min}.$$

□

Problem 10. Låt $\triangle ABC$ vara en spetsvinklig triangel med ortocentrum H. Låt Γ vara cirkeln som går igenom H och som tangerar den omskrivna cirkeln av triangeln $\triangle ABC$ i A. Låt M vara medelpunkten av Γ. Antag att Γ skär linjerna BH och CH igen i punkterna D respektive E.

Bevisa att den omskrivna cirkeln av triangeln $\triangle MDE$ tangerar linjen BC.

Lösningsförslag. Denna lösning använder riktade vinklar.

Låt O beteckna medelpunkten av den omskrivna cirkeln av triangeln ABC. Låt $N = AO \cap BC$ och $K = AO \cap \Gamma \neq A$. Då kommer AK vara en diameter av Γ, så $AH \perp HK$ vilket implicerar att $HK \parallel BC$. Därmed är

$$\angle ANB = \angle AKH = \angle ADH = \angle ADB$$

så A, D, N och B är koncykliska. Av symmetriskäl är då även A, E, N och C koncykliska.

Vidare, eftersom AH och AO är isogonala i $\angle BAC$, har vi att

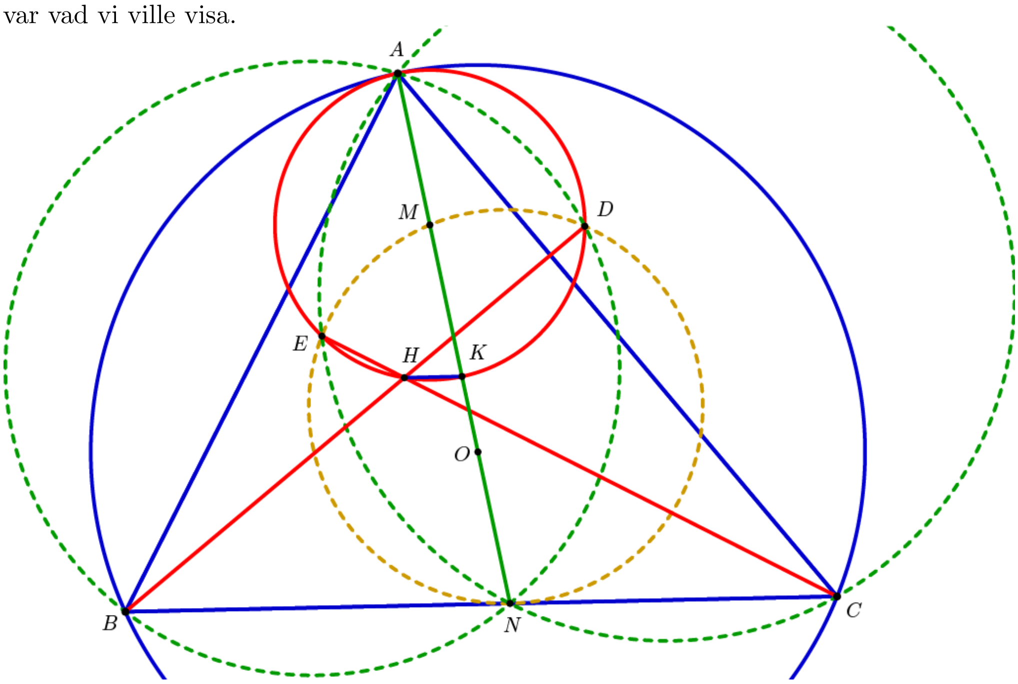
$$\begin{aligned}\angle NBD = \angle KHD &= \frac{\pi}{2} - \angle DHA \\ &= \frac{\pi}{2} - \angle BHA \\ &= \angle HAC = \angle BAO = \angle BAN = \angle BDN\end{aligned}$$

så $|BN| = |DN|$, och av symmetriskäl får vi även $|CN| = |EN|$.

Då får vi att

$$\angle ENB = 2\angle ECN = 2\angle EAN = 2\angle EAM = \angle EMN$$

vilket betyder att den omskrivna cirkeln av triangel MEN tangerar linjen BC i N, där det sista steget följer från att $|AM| = |EM|$. Av symmetriskäl måste då även den omskrivna cirkeln av triangel MDN tangera linjen BC i N. Från detta följer att D, M, E och N är koncykliska och att deras omskrivna cirkel tangerar linjen BC i N, vilket var vad vi ville visa.



□

Problem 11. Scott har ett oändligt stort papper med ett rutnät av liksidiga trianglar. Han klipper ut en sammanhängande figur genom att bara klippa längs rutnätets linjer. Sedan viker han ihop figuren på följande vis: varje vikning sker längs någon av rutnätets linjer och resulterar i att figurens area halveras. Efter ett ändligt antal sådana vikningar av figuren får han en triangelruta. Bevisa att det som var kvar av pappret efter att han klippte ut sin figur är sammanhängande.

[*Med en sammanhängande del av rutnätet menar vi en mängd triangelrutor så att man kan gå mellan alla par av rutor i denna mängd genom att gå mellan rutor i mängden med gemensamma sidor.*]

Lösningsförslag. Låt n vara det totala antalet vikningar som Scott utför. Låt F_n vara pappersfiguren som Scott började med och låt F_{i-1} vara pappersfiguren som erhålls när han viker F_i över linjen ℓ_i för varje $1 \leq i \leq n$. Att arean av F_{i-1} är hälften så stor som arean av F_i implicerar att F_i måste bestå av två kopior av F_{i-1} som är spegelbilder av varandra i linjen ℓ_i.

Antag att n är minimalt sådant att det som var kvar av det oändliga pappersarket efter att Scott klippt ut figuren F_n inte är sammanhängande. Då måste F_n ha (åtminstone) ett hål. Eftersom F_{n-1} inte har några hål måste ℓ_n skära detta hål mitt itu; därmed måste det existera två triangelrutor A och B i F_{n-1} som uppfyller att:

(i) A har en sida på ℓ_n;

(ii) B har ett hörn (eller en sida) på ℓ_n;

(iii) A och B nuddar inte varandra; och

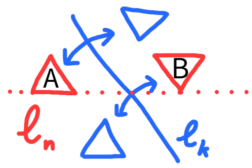
(iv) den triangelruta bredvid B som nuddar ℓ_n och som ligger närmre A (än vad B gör) är inte med i figuren F_{n-1};

eftersom F_n är sammanhängande, och ℓ_n går igenom ett hål i F_n.

Eftersom Scott så småningom viker F_{n-1} till en enda triangelruta kommer det finnas en vikningslinje ℓ_k som har A och B på olika sidor om sig. Det finns då två fall:

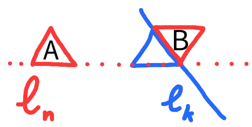
- B har inte en sida på linjen ℓ_k.

  Då kommer spegelbilden av antingen A eller B i linjen ℓ_k att ligga på andra sidan av linjen ℓ_n. Detta är en motsägelse eftersom F_k måste ligga helt på ena sidan av linjen ℓ_n, men samtidigt ha speglingssymmetri i linjen ℓ_k.



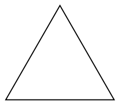
- B har en sida på linjen ℓ_k.

  Då kommer spegelbilden av B i linjen ℓ_k ligga närmare A än vad B gör, en motsägelse till (iv).

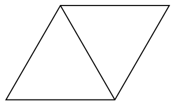


Därmed är antagandet ovan falskt, så vi har visat att det som är kvar efter att Scott klippt ut sin pappersfigur måste vara sammanhängande. □

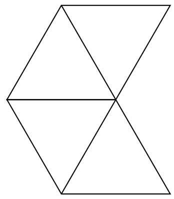
Alternativt lösningsförslag. Vi använder samma notation som i lösningen ovan. Betrakta vad som händer om Scott vecklar ut pappret igen. Han börjar då med en enda liksidig triangel F_0. Vidare måste F_1 vara en romb som består av två kopior av F_0, och F_2 måste vara figuren i bilden nedan.



F_0

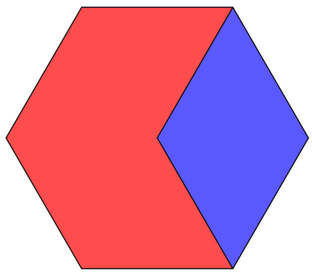


F_1



F_2

Betrakta nu för $k \geq 2$ den minsta konvexa polygon H_k, vars sidor är parallella med triangelrutnätets linjer, som innehåller figuren F_k. Till exempel vet vi att H_2 är en regelbunden hexagon med sidlängd 1 (se bild).



H_2

Vi vill visa med induktion att följande gäller för $k \geq 2$:

- För varje sida i H_k gäller att dess skärning med F_k är antingen en enda punkt, eller ett sammanhängande segment.
- H_{k+1} är en hexagon som kan erhållas genom att spegla H_k i en av dess sidor s, och därefter förlänga de två sidor som inte är parallella med s och inte heller har ett gemensamt hörn med s, samt förlänga deras spegelbilder.

Basfallet består av att visa den första punkten för $k = 2$, vilket vi redan gjort (se bild med H_2 ovan).

För induktionssteget, eftersom F_k ligger helt på ena sidan av linjen ℓ_{k+1} så måste ℓ_{k+1} vara en förlängning av en sida s av H_k. Speglas nu H_k i sidan s så kommer alla sidor av H_k och dess spegling H'_k att skära F_{k+1} i antingen en punkt eller ett sammanhängande segment. Detta förblir sant när de två sidorna av H_k (och H'_k), som inte är parallella med s och inte heller har ett gemensamt hörn med s, förlängs för att bilda en hexagon Q med den sida av H_k (och H'_k) som är parallell med s men som inte sammanfaller med s. Notera att det inte är möjligt för en strikt mindre konvex polygon än Q att innehålla alla de punkter och sidor i F_{k+1} som ligger på Q:s sidor, så därför måste $H_{k+1} = Q$. $\square$

Problem 12. En oändlig sekvens r_0, r_1, r_2, ..., består av rationella tal och för varje heltal $n \geq 1$ gäller det att r_n är ett nollställe till polynomet

$$x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_0.$$

Visa att det finns ett tal N så att $r_n = r_N$ för alla $n > N$.

Lösningsförslag. Vi kan börja med att notera att $r_0 = 0$ ger $r_n = 0$ för alla n, vilket kan visas med induktion. Sekvensen $0, 0, 0, \ldots$ är konstant då i detta fall kan vi ta $N = 0$. Notera också att om $r_0 \neq 0$ så kan inget element i sekvensen vara 0 eftersom 0 är en rot till $x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_0$ endast om $r_0 = 0$. Från och med nu antar vi att $r_0 \neq 0$. Vi definierar polynomet

$$f_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} r_k x^k.$$

Kravet vi har från problemlydelsen är då att $f_n(r_n) = 0$ för alla $n \geq 1$. För varje n skriver vi $r_n = \frac{a_n}{b_n}$ där a_n och b_n är relativt prima heltal och $a_n > 0$.

Lemma 12.1. *För alla n gäller $a_n | a_0$ och $b_n | b_0$.*

Bevis. Lemmat stämmer självklart för $n = 0$ och vi antar induktivt att det stämmer för $n = 0, 1, \ldots, n-1$. vi har att r_n är ett nollställe till f_n och därmed även till $b_0 f_n$. Vi har att

$$b_0 f_n(x) = b_0 x^n + b_0 r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0 r_0.$$

Enligt induktionsantagandet är varje koefficient i polynomet ovan ett heltal eftersom $b_m | b_0$ för alla $m < n$. Rationella rotsatsen ger nu att $b_n | b_0$ och $a_n | a_0$ eftersom $b_0 r_0 = a_0$. Lemmat följer nu från induktion. $\square$

Från lemmat får vi att mängden $\{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ är ändlig eftersom a_0 och b_0 har ändligt många delare. Varje tal i sekvensen $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ kommer antingen förekomma ändligt många gånger, eller oändligt ofta, och det måste finnas ett tal $N \geq 1$ så att r_n förekommer oändligt ofta om $n \geq N$.

Varje tal som förekommer oändligt ofta förekommer minst 2 gånger. Anta att $r_n = r_{n+k}$, där $n \geq N, k \geq 1$. Definiera

$$g_{n,k}(x) \coloneqq x^{1-n}(f_{n+k}(x) - f_n(x)) = x^k - 1 + \sum_{m=0}^{k-1} r_{n+m} x^m.$$

Eftersom $r_n \neq 0$ och $f_n(r_n) = f_{n+k}(r_n) = 0$ gäller det att $g_{n,k}(r_n) = 0$.

Lemma 12.2. *för $n \geq N$ gäller $a_n = 1$*

Bevis. Notera att polynomet $b_0 \cdot g_{n,k}(x)$ har heltalskoefficienter och dess konstantkoefficient är $b_0 r_n - b_0 = \frac{b_0}{b_n} a_n - b_0$. Eftersom r_n är ett nollställe till $g_{n,k}$ gäller det att $a_n | \frac{b_0}{b_n} a_n - b_0 \Rightarrow a_n | b_0$. Eftersom $a_n | a_0$ och $a_n | b_0$ måste vi ha $a_n = 1$. Därmed gäller det även för alla $n \geq N$ att $r_n = \frac{1}{b_n}$. $\square$

Vi sätter nu in $a_n = 1$ i ekvationen $g_{n,k}(r_n) = 0$, (igen med $n \geq N$) och vi får

$$1 - \frac{1}{b_n} = b_n^{-k} + \sum_{m=1}^{k-1} r_{n+m} b_n^{-m} \tag{1}$$

för alla $n \geq N$.

Lemma 12.3. *För $n \geq N$ gäller $b_n \in \{-1, 1, 2\}$.*

Bevis. Vi antar att $b_n \notin \{-1, 1, 2\}$ för något $n \geq N$ Ifall vi applicerar triangelolikheten på (1) får vi

$$\left|1 - \frac{1}{b_n}\right| = \left|b_n^{-k} + \sum_{m=1}^{k-1} r_{n+m} b_n^{-m}\right| \leq |b_n|^{-k} + \sum_{m=1}^{k-1} |r_{n+m}||b_n|^{-m}.$$

Notera att $|r_{n+m}| = |b_{n+m}^{-1}| \leq 1$ gäller för alla $m > 0$. Vi har att $|b_n|^{-1} < 1$ och vi får med geometrisk summa

$$\left|1 - \frac{1}{b_n}\right| < \sum_{m=1}^{\infty} |b_n|^{-m} = \frac{1}{|b_n| - 1}.$$

Detta kan i sin tur skrivas om till

$$|b_n - 1| \cdot (|b_n| - 1) < |b_n|$$

Det b_n kan dock inte uppfylla olikheten ovan om $b_n \notin \{-1, 1, 2\}$. Detta kan bevisas med induktion: påståendet olikheten håller inte för $b_n = -2$ eller $b_n = 3$, och när vi ökar respektive minskar b_n med 1 ökar vänsterledet med mer än högerledet. De enda värdena b_n kan anta för $n \geq N$ är alltså $-1, 1, 2$. □

Lemma 12.4. *Om $b_n = 2$ för oändligt många n gäller $b_n = 2$ för alla $n \geq N$*

Bevis. Anta att $b_n = b_{n+k} = 2$ och $b_{n+m} \neq 2$ för $0 < m < k$, där $n \geq N$ och $k > 1$. Det betyder, som innan, att $g_{n,k}(\frac{1}{2}) = 0$, vilket vi kan utveckla till

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} r_{n+1} = 2^{-k} + \sum_{m=2}^{k-1} r_{n+m} 2^{-m}.$$

Ifall $r_{n+1} = -1$ kan vi se att absolutbeloppet av vänsterledet är 1, medan beloppet av högerledet är mindre än 1, så vi kan inte ha likhet. Ifall $r_{n+1} = 1$ blir vänsterledet 0, men den största termen till belopp i högerledet (2^{-k} om $k = 2$ och $r_{n+2} \cdot 2^{-2}$ om $k > 2$) har större belopp än alla andra termer i högerledet tillsammans, vilket ger att högerledet inte kan vara 0, så vi kan inte ha likhet. Ifall $b_n = 2$ för oändligt många n Måste $b_n = 2$ för alla $n \geq N$. □

Anta nu att $b_n = 2$ inte gäller för oändligt många n. Då måste -1 och 1 vara de enda värdena b_n antar för $n \geq N$. Ifall $r_n = r_{n+1}$ får vi $g_{n,1}(r_n) = 0 \Rightarrow r_n - 1 + r_n = 0 \Rightarrow r_n = \frac{1}{2}$. Alltså kan varken -1 eller 1 förekomma två gånger i rad i sekvensen (r_n). Alltså måste b_n alternera mellan 1 och -1 för $n \geq N$. Därmed måste vi för något $n \geq N$ ha $r_n = -1, r_{n+1} = 1, r_{n+2} = -1$. Detta betyder att $g_{n,2}(-1) = 0$, det vill säga

$$(-1)^2 - 1 + (-1) + 1 \cdot (-1) = 0.$$

Detta stämmer dock inte, så vi får en motsägelse. Alltså måste $r_n = \frac{1}{2}$ gälla för oändligt många n, och därmed för alla $n \geq N$. Därmed är vi klara

□