HÖJDPUNKTEN 2026

Högstadietävling den 20 mars 2026

Lösningsförslag

Problem 1. För de tre okända positiva heltalen a, b och c har vi nedan början på en multiplikationstabell. Fyll i resten. *Endast svar krävs*

	a	b	c
a		65	
b			
c	35		49

Lösningsförslag. Lösningen visas nedan och erhålls om $a = 5$, $b = 13$ och $c = 7$, alternativt om $a = -5$, $b = -13$ och $c = -7$. Man kan hitta denna lösning genom att först

	a	b	c
a	25	65	35
b	65	169	91
c	35	91	49

□

Problem 2. Hur många tresiffriga tal finns det som varken börjar eller slutar på 99?

Lösningsförslag. **Svar: 882**

Det finns 900 tresiffriga tal (hundra för varje hundratalssiffra). Utav dessa finns det 18 som börjar eller slutar på 99, nämligen

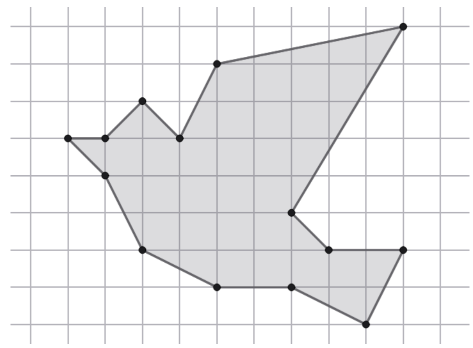
$$\begin{gathered}199,\ 299,\ 399,\ 499,\ 599,\ 699\\ 799,\ 899,\ 999,\ 990,\ 991,\ 992\\ 993,\ 994,\ 995,\ 996,\ 997,\ 998\end{gathered}$$

Antalet tresiffriga tal som varken börjar eller slutar på 99 är alltså

$$900 - 18 = 882$$

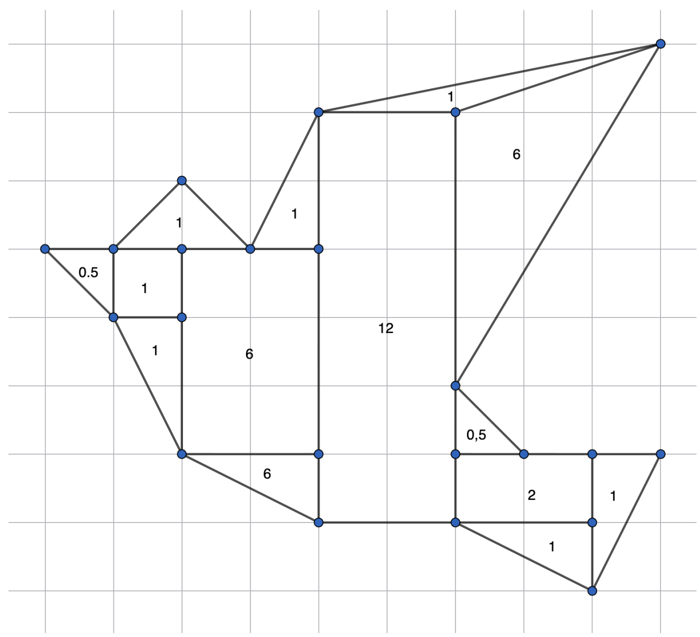
□

Problem 3. Beräkna arean av det skuggade området. Varje ruta i rutnätet har area 1.



Lösningsförslag. **Svar:** 35

Vi delar upp området i trianglar och rektanglar som i bilden nedan. Alla dessa delar kan vi lätt beräkna arean av: ($\frac{b \cdot h}{2}$ för trianglar och $b \cdot h$ för rektanglar). Områdets area är summan av alla dessa areor, vilket blir 35.



$\square$

Problem 4. En virrig tidsresare har hamnat i år 1 e.Kr. med endast en trasig tidsmaskin till hands. Tidsmaskinen har bara tre knappar som fungerar, och de gör följande:

- (+1) — Hoppa ett år framåt.
- (−1) — Hoppa ett år bakåt.
- (×3) — Tredubbla årtalet.

Tidsmaskinen har energi kvar för tio knapptryck, men inte fler än så. Beskriv hur tidsresaren kan komma tillbaka till år 2026 e.Kr. *(Endast svar krävs)*

Lösningsförslag. **Lösning**

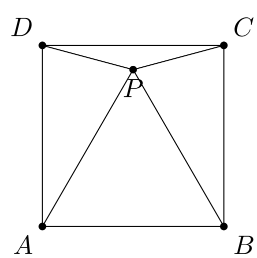
```
(x3) -> 3 e.Kr
(x3) -> 9 e.Kr
(-1) -> 8 e.Kr
(x3) -> 24 e.Kr
(+1) -> 25 e.Kr
(x3) -> 75 e.Kr
(x3) -> 225 e.Kr
(x3) -> 675 e.Kr
(x3) -> 2025 e.Kr
(+1) -> 2026 e.Kr
```

Alternativt: För att komma från 9 till 25 kan man också trycka `x3-1-1`. □

Problem 5. Låt A, B, C och D vara hörnen på en kvadrat i den ordningen. Låt P vara en punkt inuti kvadraten sådan att $\triangle ABP$ är en liksidig triangel. Hur stor är vinkeln $\angle CPD$?ß

Lösningsförslag.

$$\boxed{\angle CPD = 150^\circ}$$



Eftersom $ABCD$ är en kvadrat gäller

$$AB = BC = CD = DA$$

och eftersom $\triangle ABP$ är liksidig gäller dessutom

$$AB = AP = BP \quad \text{och} \quad \angle APB = 60^\circ.$$

Nu får vi

$$\angle PAD = \angle BAD - \angle BAP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Eftersom $AD = AB = AP$ är triangeln APD likbent, så

$$\angle APD = \angle ADP = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

På samma sätt

$$\angle PBC = \angle ABC - \angle ABP = 90° - 60° = 30°.$$

Eftersom $BP = AB = BC$ är triangeln BPC likbent, så

$$\angle BPC = \angle BCP = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

Vinklarna runt punkten P är alltså

$$\angle APB = 60°, \qquad \angle BPC = 75°, \qquad \angle DPA = 75°.$$

Därför blir

$$\angle CPD = 360° - 60° - 75° - 75° = 150°$$

vilket skulle visas. □

Problem 6. Ida har startat en poesiklubb där medlemmar träffas och skriver dikter tillsammans. Varje träff skriver varje medlem en dikt som de klistrar in i en gemensam diktsamling. Första träffen är det bara Ida som kommer, men allt eftersom är det fler deltagare som dyker upp och ingen deltagare slutar någonsin komma. Dock är det inget tillfälle då fler än en ny deltagare dyker upp. Efter åtta träffar är terminen slut och då har diktsamlingen 22 dikter varav 14 skrevs de senaste fyra träffarna. Hur många deltagare har då poesiklubben och vid vilka träffar kom de?

Lösningsförslag. Under de första fyra träffarna skrevs $22 - 14 = 8$ dikter. Låt n vara antalet nya medlemmar inklusive Ida som dök upp under denna period. Om $n = 2$ hade de som mest kunnat skriva $4 + 3 = 7$ dikter. Om $n = 4$ hade det inneburit att de skrev exakt $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ dikter. Att $n = 3$ är dock möjligt om och endast om en person kom dag 2 och en annan dag 4. Dessa tre medlemmar kommer under resterande fyra dagar skriva $3 \times 4 = 12$ dikter.

Resterande medlemmar (de som dök upp under de fyra sista dagarna) skrev alltså exakt två dikter. Om två personer hade dykt upp skulle de behövt skriva som minst tre dikter så det dök alltså bara upp en person, nämligen dag 7. Totalt har klubben alltså fyra medlemmar (inklusive Ida). De dök upp dag 1 (Ida), dag 2, dag 4 och dag 7. □

Problem 7. John har två olika gräsklippare vid namn Alfons och Bosse som drar $8\,\frac{\text{dL}}{\text{tim}}$ respektive $6\,\frac{\text{dL}}{\text{tim}}$ bensin. För att jämföra de två använde han först Alfons för att klippa ena halvan av gräsmattan, och sen Bosse för att klippa andra halvan. Detta tog sammanlagt 15 minuter och förbrukade 1.7 dL bensin. Vilken gräsklippare förbrukade minst bränsle?

Lösningsförslag. Låt x vara tiden (i minuter) som A användes. Då är $15 - x$ den totala tiden som B användes. Om vi räknar på hur mycket bensin som de då måste ha dragit får vi att

$$
\begin{aligned}
x\,min \cdot \frac{8\frac{dL}{tim}}{60\frac{min}{tim}} + (15-x)\,min \cdot \frac{6\frac{dL}{tim}}{60\frac{min}{tim}} &= 1.7dL \\
x \cdot \frac{8}{60} + (15-x) \cdot \frac{6}{60} &= 1.7 \\
8x + (15-x) \cdot 6 &= 60 \cdot 1.7 \\
x \cdot (8-6) &= 60 \cdot 1.7 - 15 \cdot 6 \\
x &= (60 \cdot 1.7 - 15 \cdot 6)/2 \\
&= (102-90)/2 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Därför använde gräsklippare A totalt $6 \cdot 8/60 = 0.8$ dL bensin och B använda totalt 0.9 dL bensin. Eftersom de båda klippte lika mycket gräs är gräsklippare A mer energisnål. □

Problem 8. En mataffär har ett erbjudande: Köp minst fyra frukter och få den billigaste gratis. Den första kunden köper tre apelsiner och en banan. Den andra köper tre apelsiner och två citroner. Den tredje köper två bananer och två citroner. Det visade sig att alla dessa tre kunder fick betala exakt 35 kr för sina frukter. Hitta styckpriset för varje frukt.

Lösningsförslag. Låt a, b och c beteckna styckpriserna för apelsiner, bananer respektive citroner. Om $c \geq b$ så hade kund 2 betalat mer än kund 1 vilket de inte gör, alltså måste $b > c$. Om $a \geq b$ så hade kund 2 betalat mer än kund 3, alltså måste $b > a$. Vi drar därmed slutsatsen att bananerna dyrast av de tre frukterna. Kvar återstår att avgöra huruvida a eller c är störst. Kund 1 och 3 betalar $2a + b$ respektive $b + 2c$ för sina frukter. Om $c > a$ så blir

$$35 = 2a + b < 2c + b < b + 2c = 35$$

vilket inte är möjligt, alltså är $a \geq c$. Nu har vi listat ut prisordningen av frukterna, så vi vet alltså hur många frukter av varje sort varje kund behöver betala för. Detta ger ekvationssystemet

$$
\begin{cases}
2a + b = 35 & (1) \\
3a + c = 35 & (2) \\
2b + c = 35 & (3)
\end{cases}
$$

Från (1) och (2) får vi att $b = 35 - 2a$ och $c = 35 - 3a$. Vi substituerar in detta i (3) och får

$$
\begin{aligned}
2(35-2a) + (35-3a) &= 35 \\
\iff 105 - 7a &= 35 \\
\iff a &= \frac{105-35}{7} = 10.
\end{aligned}
$$

Alltså är $b = 35 - 20 = 15$ och $c = 35 - 30 = 5$.

Svar: Apelsinerna kostar 10 kr, bananerna kostar 15 kr och citronerna kostar 5 kr. □

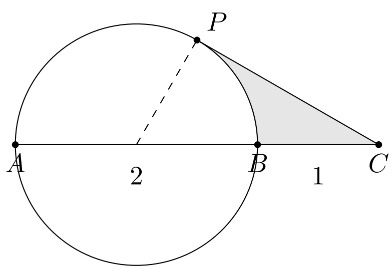
Problem 9. Jakob ritar fyra punkter i planet där inga tre ligger på samma linje. Välj en av dessa och dra två linjer från den till två andra punkter. Då bildas en vinkel (vi väljer den mindre än 180°). Vad blir resultatet om vi summerar alla möjliga sådana vinklar?

Lösningsförslag. Låt A, B, C och D beteckna de fyra punkterna. Det finns exakt fyra sätt att välja den första punkten. När den första punkten är vald finns det tre sätt att välja de två andra punkterna. Alltså finns det $3 \times 4 = 12$ vinklar som vi ska summera, nämligen $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$, $\angle ACD$, $\angle CDA$, $\angle DAC$, $\angle ABD$, $\angle BDA$, $\angle DAB$, $\angle BCD$, $\angle CDB$, och $\angle DBC$. Vi ser att detta är vinklarna i fyra trianglar ($\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ och $\triangle BCD$). Vinkelsumman i en triangel är alltid 180°, alltså är summan av alla dessa vinklar $4 \cdot 180° = 720°$. □

Problem 10. Punkterna A, B och C ligger på linje i den ordningen så att $|AB| = 2$ och $|BC| = 1$. Punkten P ligger på cirkeln med diameter AB så att linjen PC tangerar cirkeln. Hitta arean av området som innesluts av sträckorna BC och CP samt cirkelbågen mellan P och B längs cirkeln med diameter AB.

Lösningsförslag.

Lösning.



Låt O vara mittpunkten av AB. Då är $OA = OB = 1$ och eftersom $|BC| = 1$ fås $OC = 2$.

Eftersom PC är tangent gäller $OP \perp PC$, så i den rätvinkliga triangeln OPC:

$$PC = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

Vidare

$$\cos \angle POC = \frac{OP}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BOP = \angle POC = \frac{\pi}{3}.$$

Arean av triangeln BCP är

$$[\triangle BCP] = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \text{höjd} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Cirkelsegmentet mellan bågen BP och kordan BP är

$$\text{sektor } BOP - \triangle BOP = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Sökt area blir därför

$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}}$$

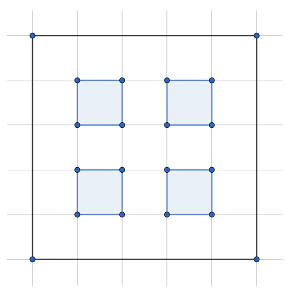
□

Problem 11. En kvadratisk matta är ihopsydd av kvadratiska tygbitar varav hälften är stora och hälften är små. De stora tygbitarna är 2×2 dm och de små är 1×1 dm. Lapparna är ihopsydda utan överlapp. Vad är den minsta möjliga storleken på denna matta?

Lösningsförslag. Låt n vara antalet lappar av varje sort och s vara mattans sidlängd. Vi får då att

$$5n = s^2,$$

alltså är s delbart på 5. Först kollar vi om $s = 5$ fungerar. Vi får då $n = 5^2/5 = 5$, men om vi försöker lägga ut stora lappar över en 5×5 dm matta så märker vi att varje lapp måste täcka exakt en av rutorna i bilden.



Det finns bara fyra rutor, alltså får vi plats med som 4 stora lappar vilket inte är tillräckligt så $s = 5$ går inte.

Nästa tal att kontrollera är $s = 10$, och vi ser att det fungerar. Dela upp ett 10×10-rutnät i 25 stora rutor. Välj fem av dessa rutor och dela upp de i fyra små rutor. Detta ger 20 rutor och 20 stora rutor, som önskat.

Svar: Mattan är minst 1×1 kvadratmeter. □

Problem 12. Hitta alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} p + q + r = s \\ p + 2q + 3r = 5t \end{cases}$$

där p, q, r, s och t är primtal.

Lösningsförslag. Om vi subtraherar den första ekvationen från den andra så får vi

$$q + 2r = 5t - s.$$

Både s och t är självfallet större än 2, och därmed udda, alltså är högerledet udda $-$ udda $=$ jämnt. Detta innebär att q är jämnt, det vill säga $q = 2$.

I första ekvationen ser vi nu att $p + r$ måste vara udda. Detta ger två fall:

Fall 1 $p = 2$ och $r =$udda: Den andra ekvationen blir

$$2 + 4 + 3r = 5t.$$

Men vänsterledet är en multipel av 3, alltså måste $t = 3$, och därmed $r = (15 - 4 - 2)/3 = 3$. Första ekvationen ger sedan $s = 7$. Med insättning ser vi att detta löser ekvationssystemet.

Fall 2 $p =$ udda och $r = 2$: Den andra ekvation blir nu

$$p + 4 + 6 = 5t \iff p = 5t - 10$$

Högerledet är nu en multipel av 5, därmed måste $p = 5$ och $t = 3$. Men om vi stoppar in detta i första ekvationen får vi $s = 5 + 2 + 2 = 9$, vilket inte är ett primtal.

Svar: Ekvationssystemet har endast en lösning, nämligen $(p, q, r, s, t) = (2, 2, 3, 7, 3)$. $\square$