HÖJDPUNKTEN 2026

Gymnasietävling den 20 mars 2026

Lösningsförslag

Problem 1. En virrig tidsresare har hamnat i år 1 e.Kr. med endast en trasig tidsmaskin till hands. Tidsmaskinen har bara tre knappar som fungerar, och de gör följande:

- $(+1)$ — Hoppa ett år framåt.
- (-1) — Hoppa ett år bakåt.
- $(\times 3)$ — Tredubbla årtalet.

Tidsmaskinen har energi kvar för tio knapptryck, men inte fler än så. Beskriv hur tidsresaren kan komma tillbaka till år 2026 e.Kr. *(Endast svar krävs)*

Lösningsförslag. **Lösning**

```
(x3) -> 3 e.Kr
(x3) -> 9 e.Kr
(-1) -> 8 e.Kr
(x3) -> 24 e.Kr
(+1) -> 25 e.Kr
(x3) -> 75 e.Kr
(x3) -> 225 e.Kr
(x3) -> 675 e.Kr
(x3) -> 2025 e.Kr
(+1) -> 2026 e.Kr
```

Alternativt: För att komma från 9 till 25 kan man också trycka `x3-1-1`. □

Problem 2. John har två olika gräsklippare vid namn Alfons och Bosse som drar $8\frac{\text{dL}}{\text{tim}}$ respektive $6\frac{\text{dL}}{\text{tim}}$ bensin. För att jämföra de två använde han först Alfons för att klippa ena halvan av gräsmattan, och sen Bosse för att klippa andra halvan. Detta tog sammanlagt 15 minuter och förbrukade 1.7 dL bensin. Vilken gräsklippare förbrukade minst bränsle?

Lösningsförslag. Låt x vara tiden (i minuter) som A användes. Då är $15 - x$ den totala tiden som B användes. Om vi räknar på hur mycket bensin som de då måste ha dragit får vi att

$$\begin{aligned}
x\,min \cdot \frac{8\frac{dL}{tim}}{60\frac{min}{tim}} + (15-x)\,min \cdot \frac{6\frac{dL}{tim}}{60\frac{min}{tim}} &= 1.7dL \\
x \cdot \frac{8}{60} + (15-x) \cdot \frac{6}{60} &= 1.7 \\
8x + (15-x) \cdot 6 &= 60 \cdot 1.7 \\
x \cdot (8-6) &= 60 \cdot 1.7 - 15 \cdot 6 \\
x &= (60 \cdot 1.7 - 15 \cdot 6)/2 \\
&= (102 - 90)/2 \\
&= 6
\end{aligned}$$

Därför använde gräsklippare A totalt $6 \cdot 8/60 = 0.8$ dL bensin och B använda totalt 0.9 dL bensin. Eftersom de båda klippte lika mycket gräs är gräsklippare A mer energisnål. □

Problem 3. En mataffär har ett erbjudande: Köp minst fyra frukter och få den billigaste gratis. Den första kunden köper tre apelsiner och en banan. Den andra köper tre apelsiner och två citroner. Den tredje köper två bananer och två citroner. Det visade sig att alla dessa tre kunder fick betala exakt 35 kr för sina frukter. Hitta styckpriset för varje frukt.

Lösningsförslag. Låt a, b och c beteckna styckpriserna för apelsiner, bananer respektive citroner. Om $c \geq b$ så hade kund 2 betalat mer än kund 1 vilket de inte gör, alltså måste $b > c$. Om $a \geq b$ så hade kund 2 betalat mer än kund 3, alltså måste $b > a$. Vi drar därmed slutsatsen att bananerna dyrast av de tre frukterna. Kvar återstår att avgöra huruvida a eller c är störst. Kund 1 och 3 betalar $2a + b$ respektive $b + 2c$ för sina frukter. Om $c > a$ så blir

$$35 = 2a + b < 2c + b < b + 2c = 35$$

vilket inte är möjligt, alltså är $a \geq c$. Nu har vi listat ut prisordningen av frukterna, så vi vet alltså hur många frukter av varje sort varje kund behöver betala för. Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2a + b = 35 & (1) \\ 3a + c = 35 & (2) \\ 2b + c = 35 & (3) \end{cases}$$

Från (1) och (2) får vi att $b = 35 - 2a$ och $c = 35 - 3a$. Vi substituerar in detta i (3) och får

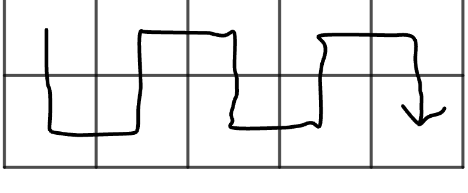
$$\begin{aligned} 2(35 - 2a) + (35 - 3a) = 35 \\ \iff 105 - 7a = 35 \\ \iff a = \frac{105 - 35}{7} = 10. \end{aligned}$$

Alltså är $b = 35 - 20 = 15$ och $c = 35 - 30 = 5$.

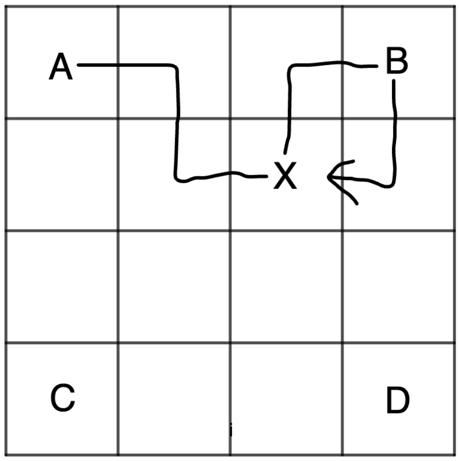
Svar: Apelsinerna kostar 10 kr, bananerna kostar 15 kr och citronerna kostar 5 kr. □

Problem 4. Styrbjörn går runt i ett $n \times m$ rutnät, där $n \geq 2$ och $m \geq 2$ är heltal. Han börjar i ett av hörnen, och går därefter varje minut till en ruta som ligger intill (det vill säga delar en sida) men den ruta han befinner sig i just nu. Styrbjörn är lite rastlös av sig, och vill därför aldrig besöka samma ruta två gånger. Dessutom vill han aldrig gå två steg i rad i samma riktning. För vilka värden på n och m kan Styrbjörn besöka alla $n \cdot m$ rutor?

Lösningsförslag. Han kan besöka alla rutor om och endast om antingen n eller m är lika med 2. Om n eller m är lika med 2 kan Styrbjörn passera alla rutor genom att sicksacka genom rutnätet. Se bild:

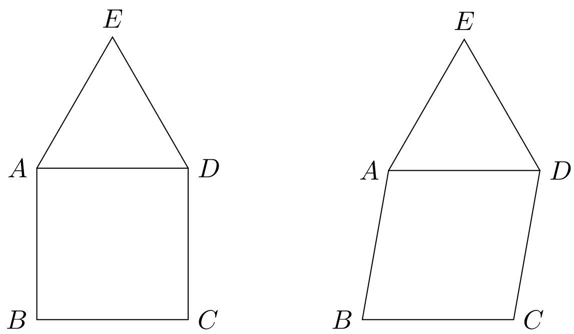


Anta nu att varken n eller m är 2. Låt A vara hörnet där Styrbjörn börjar på och låt B, C, och D vara de andra hörnen. Observera att två steg alltid tar Styrbjörn till en ruta som är ett diagonalt steg från den han stod på. Det finns bara en ruta som är ett diagonalt steg bort från B, låt oss kalla den X. För att komma till B måste Styrbjörn först passera X (Eftersom $m, n \geq 3$ kan styrbjörn inte gå direkt från A till B). På samma sätt, om Björn ska ta två steg från B så måste han gå tillbaka till X, vilket han inte får. Alltså måste han sluta i B eller draget efter. Samma sak måste gälla för C och D, men det är omöjligt för Björn kan bara sluta sin promenad en gång. Alltså kan Styrbjörn inte besöka alla rutor.



□

Problem 5. Bilden visar en tvådimensionell modell av ett hus bestående av sex lika långa linjesegment. En kraftig vindpust har gjort att husets väggar (AB och CD) har börjat luta (med en avvikelse mindre än 30° från sina ursprungliga riktningar). Bevisa att vinkeln $\angle BEC$ inte beror på denna lutning, och bestäm vinkelns storlek.



Lösningsförslag. Låt $x = \angle AEB$, $y = \angle BEC$ och $z = \angle CED$. Triangeln $\triangle ADE$ är liksidig, därmed är

$$x + y + z = \angle AED = 60^\circ. \quad (*)$$

Vi har också att

$$x = \angle ABE = \angle ABC - \angle EBC$$

$$z = \angle DCE = \angle DCB - \angle ECB$$

Från vinkelsumman i triangeln $\triangle BCE$ får vi sedan

$$y = 180^\circ - \angle EBC - \angle ECB$$

därmed

$$x + z - y = \angle ABC + \angle DCB - 180^\circ = 0 \quad (**)$$

där vi använde att summan av närliggande vinklar i en romb ($\square ABCD$) är 180°. Sist subtraherar vi $(**)$ från $(*)$ och får

$$2y = 60^\circ,$$

det vill säga $y = 30^\circ$. $\square$

Problem 6. I det gamla slottet arbetar den kungliga glasmästaren med att skapa ett nytt fönster till tronhallen. Hon måste placera tio lila glasrutor och sex gula glasrutor i ett rutnät på 4×4 rutor så att inga två rader och inga två kolumner har samma antal lila rutor. På hur många sätt kan hon göra detta?

Lösningsförslag. Om någon rad eller kolumn har noll rutor målade så kan resterande rutor ha som högst $2 + 3 + 4 = 9 < 10$ lila rutor. Varje rad och kolumn ha minst en lila ruta, vilket innebär . Vi ska sedan bevisa att målningen bestäms unikt av antalet lila rutor i varje rad och kolumn. På så sätt reduceras frågan till att hitta hur många sätt radantalen och kolumnantalen kan permuteras. Både radantalen och kolumnantalen kan väljas på $4! = 24$ sätt, så det totala antalet sätt att placera glasrutorna blir (enligt multiplikationsprincipen) $(4!)^2 = 576$.

Låt R_1, R_2, R_3, R_4, C_1, C_2, C_3, C_4 beteckna raderna respektive kolumnerna som ska ha 1,2,3 respektive 4 lila rutor. R_4 och C_4 måste först och främst fyllas med lila rutor. R_1 och C_1 får då varsin färgad ruta, vilket betyder att resterande rutor i R_1 och C_1 måste vara gula. I R_3 och C_3 tvingas således alla rutor som inte är i C_1 eller R_1 vara lila. Kvar återstår rutan i C_2 och R_2 där den sista gula rutan placeras. Nu har tio rutor färgats lila och 6 färgats gula på ett sätt som uppfyller alla villkor och processen har visat att det är entydigt.

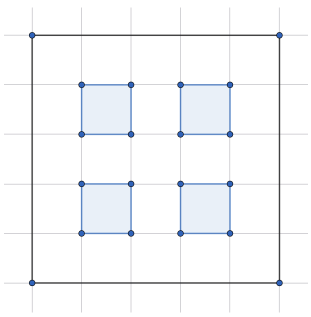
Svar: $(4!)^2 = 576$ sätt. $\square$

Problem 7. En kvadratisk matta är ihopsydd av kvadratiska tygbitar varav hälften är stora och hälften är små. De stora tygbitarna är 2×2 dm och de små är 1×1 dm. Lapparna är ihopsydda utan överlapp. Vad är den minsta möjliga storleken på denna matta?

Lösningsförslag. Låt n vara antalet lappar av varje sort och s vara mattans sidlängd. Vi får då att

$$5n = s^2,$$

alltså är s delbart på 5. Först kollar vi om $s = 5$ fungerar. Vi får då $n = 5^2/5 = 5$, men om vi försöker lägga ut stora lappar över en 5×5 dm matta så märker vi att varje lapp måste täcka exakt en av rutorna i bilden.



Det finns bara fyra rutor, alltså får vi plats med som 4 stora lappar vilket inte är tillräckligt så $s = 5$ går inte.

Nästa tal att kontrollera är $s = 10$, och vi ser att det fungerar. Dela upp ett 10×10-rutnät i 25 stora rutor. Välj fem av dessa rutor och dela upp de i fyra små rutor. Detta ger 20 rutor och 20 stora rutor, som önskat.

Svar: Mattan är minst 1×1 kvadratmeter. $\square$

Problem 8. Hitta alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} p + q + r = s \\ p + 2q + 3r = 5t \end{cases}$$

där p, q, r, s och t är primtal.

Lösningsförslag. Om vi subtraherar den första ekvationen från den andra så får vi

$$q + 2r = 5t - s.$$

Både s och t är självfallet större än 2, och därmed udda, alltså är högerledet udda $-$ udda $=$ jämnt. Detta innebär att q är jämnt, det vill säga $q = 2$.

I första ekvationen ser vi nu att $p + r$ måste vara udda. Detta ger två fall:

Fall 1 $p = 2$ och $r =$udda: Den andra ekvationen blir

$$2 + 4 + 3r = 5t.$$

Men vänsterledet är en multipel av 3, alltså måste $t = 3$, och därmed $r = (15-4-2)/3 = 3$. Första ekvationen ger sedan $s = 7$. Med insättning ser vi att detta löser ekvationssystemet.

Fall 2 $p =$ udda och $r = 2$: Den andra ekvation blir nu

$$p + 4 + 6 = 5t \iff p = 5t - 10$$

Högerledet är nu en multipel av 5, därmed måste $p = 5$ och $t = 3$. Men om vi stoppar in detta i första ekvationen får vi $s = 5 + 2 + 2 = 9$, vilket inte är ett primtal.

Svar: Ekvationssystemet har endast en lösning, nämligen $(p, q, r, s, t) = (2, 2, 3, 7, 3)$. $\square$

Problem 9. Betrakta $n \geq 3$ punkter i planet varav inga tre ligger på en linje. Välj en av dessa och dra två linjer från den till två andra punkter. Då bildas en vinkel (vi väljer den mindre än $180°$). Vad blir resultatet om vi summerar alla möjliga sådana vinklar?

Lösningsförslag. Givet tre punkter ser vi att vinklarna som bildas mellan dem är vinklarna och summerar därmed till $180°$. Alltså får vi $180°$ gånger antalet sätt att välja tre punkter utav n vilket ger svaret $\binom{n}{3} \cdot 180°$. $\square$

Problem 10. Låt $\triangle ABC$ vara en rätvinklig triangel med $\angle ABC = 90°$ och $|AB| < |BC|$. Låt D vara en punkt på hypotenusan AC sådan att $|AB| = |BD|$. Punkten T ligger på sidan BC och är sådan att $\angle ATB = \angle CTD$. Visa att linjen genom D vinkelrätt mot BD delar sträckan CT på mitten.

Lösningsförslag. Låt D' vara reflektionen av D över BC. Vi har då att $\angle CTD' = \angle CTD = \angle ATB$, så punkterna A, T och D' ligger på en linje.

Benämn $\angle BAD = \angle ADB = x$, vilket vidare ger att

$$\begin{aligned}
\angle ABD &= 180^\circ - 2x \\
\angle DBC &= 90^\circ - \angle ABD = 2x - 90^\circ \\
\angle D'BC &= \angle DBC = 2x - 90^\circ \\
\angle ABD' &= 90^\circ + \angle D'BC = 2x
\end{aligned}$$

Eftersom $|BD'| = |BD| = |AB|$ är $\triangle ABD'$ likbent, så

$$\angle BAD' = \angle BD'A = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABD' = 90^\circ - x.$$

På grund av symmetri är därför $\angle BDT = \angle BD'T = \angle BD'A$, vilket ger oss att

$$\angle TDC = 180^\circ - \angle ADB - \angle BDT = 180^\circ - x - (90^\circ - x) = 90^\circ,$$

så vinkel $\angle TDC$ är rät.

Låt M vara mittpunkten av CT. Enligt **Thales sats** är $DM = TM$, så

$$\angle TDM = \angle DTM = \angle DTC = \angle ATB = 90^\circ - \angle BAT = 90^\circ - \angle BAD' = x.$$

Som tidigare noterat är $\angle BDT = \angle BD'A = 90^\circ - x$, vilket ger att

$$\angle BDM = \angle BDT + \angle TDM = 90^\circ - x + x = 90^\circ,$$

vilket var det vi ville visa.

Det går också att visa och använda att:

- $(ABTD)$ är en cyklisk fyrhörning.
- B är centrum av cirkeln (ADD').
- $(TDD'C)$ är en cyklisk fyrhörning och tangent till BD.

$\square$

Problem 11. Hitta alla funktioner f, från de reella talen till de reella talen, som uppfyller att

$$f(f(x) + f(y) + yf(f(x))) = yf(f(x)) + xf(x)$$

för alla reella tal x och y.

Lösningsförslag.

$$\text{Sätt } P(x,y): \quad f\big(f(x) + f(y) + yf(f(x))\big) = yf(f(x)) + xf(x).$$

Vi visar att den enda lösningen är $f \equiv 0$.

Sätt

$$a = f(0).$$

Ur $P(x,0)$ får vi

$$f\big(f(x) + a\big) = xf(x). \tag{1}$$

Ur $P(0,0)$ får vi

$$f(2a) = 0. \tag{2}$$

Sätt nu $x = 2a$ i (1). Då fås

$$f\big(f(2a) + a\big) = 2a\, f(2a).$$

Med (2) blir detta
$$f(a) = 0. \tag{3}$$

Ur $P(0, y)$ får vi
$$f\big(a + f(y) + yf(f(0))\big) = yf(f(0)).$$
Eftersom $f(0) = a$ och $f(a) = 0$ enligt (3), följer
$$f(a + f(y)) = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Vi ser nu att (1) och (4) har samma vänsterled, följaktligen är
$$xf(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Alltså
$$f(x) = 0 \qquad \forall x \neq 0. \tag{5}$$

Det återstår att bestämma $f(0)$. Av (5) har vi särskilt $f(1) = 0$. Sätt nu $(x, y) = (1, 1)$ i P:
$$f\big(f(1) + f(1) + f(f(1))\big) = f(f(1)) + f(1).$$
Eftersom $f(1) = 0$, blir detta
$$f(f(0)) = f(0),$$
det vill säga
$$f(a) = a.$$
Tillsammans med (3) fås då
$$a = 0.$$
Alltså är även $f(0) = 0$.

Av detta och (5) följer
$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alltså är den enda funktionen
$$\boxed{f(x) = 0 \text{ för alla } x \in \mathbb{R}.}$$

□

Problem 12. Låt a vara ett positivt heltal. Låt a_1, a_2, a_3, …, vara den oändliga följd av positiva heltal som uppfyller att $a_1 = a$ och $a_{n+1} = a_n + \operatorname{sgd}(a_n, n)$ för alla positiva heltal n.

(a) Hitta alla möjliga värden på a så att $a_n \leq n + 2026$ för alla positiva heltal n.

(b) För varje positivt heltal a, bevisa att det existerar en konstant C sådan att $a_n \leq Cn$ för alla positiva heltal n.

[*Den största gemensamma delaren,* $\operatorname{sgd}(x, y)$, *av två heltal x och y är det största positiva heltalet som delar både x och y.*]

Lösningsförslag. (a) Vi påstår att de enda möjliga värdena är $a = 1, 2$.

Om $a = 1$, så är $a_2 = 2$ och $a_3 = 4$. Därefter gäller för varje $n \geq 3$ att om $a_n = n+1$, så
$$a_{n+1} = a_n + \gcd(a_n, n) = (n + 1) + \gcd(n + 1, n) = n + 2.$$

Alltså är $a_n = n + 1$ för alla $n \geq 3$.

Om $a = 2$, så är $a_2 = 3$, och samma induktion ger

$$a_n = n + 1 \qquad \text{för alla } n \geq 2.$$

I båda fallen gäller därför $a_n \leq n + 2026$ för alla n.

Antag nu att $a > 2$. Då är

$$a_2 = a + \gcd(a, 1) = a + 1 \geq 4 = 2 \cdot 2.$$

Vi visar med induktion att $a_n \geq 2n$ för alla $n \geq 2$. Antag att $a_n \geq 2n$.

Om $a_n = 2n$, så

$$a_{n+1} = a_n + \gcd(a_n, n) = 2n + n = 3n \geq 2(n + 1).$$

Om $a_n > 2n$, så eftersom a_n är ett heltal har vi $a_n \geq 2n + 1$, och alltså

$$a_{n+1} \geq a_n + 1 \geq 2n + 2 = 2(n + 1).$$

Alltså gäller $a_n \geq 2n$ för alla $n \geq 2$. Sätter vi $n = 2027$, får vi

$$a_{2027} \geq 4054 > 4053 = 2027 + 2026,$$

så villkoret kan inte vara uppfyllt. Följaktligen är de enda möjliga värdena

$$\boxed{1, 2}.$$

(b) Sätt för $n \geq 2$

$$b_n = \left\lceil \frac{a_n}{n - 1} \right\rceil.$$

Vi visar att $b_{n+1} \leq b_n$ för alla $n \geq 2$.

Sätt $k = b_n$. Då kan vi skriva

$$a_n = k(n - 1) - d$$

för något heltal $d \geq 0$. Då

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \gcd(a_n, n) \\ &= k(n - 1) - d + \gcd(k(n - 1) - d, n) \\ &= kn - (k + d) + \gcd(k + d, n) \leq kn, \end{aligned}$$

eftersom $\gcd(k + d, n) \leq k + d$. Därför

$$\left\lceil \frac{a_{n+1}}{n} \right\rceil \leq k = \left\lceil \frac{a_n}{n - 1} \right\rceil,$$

så (b_n) är icke-växande. Alltså

$$b_n \leq b_2 = \left\lceil \frac{a_2}{1} \right\rceil = a_2 = a + 1.$$

För $n \geq 2$ får vi då

$$a_n \leq b_n(n - 1) \leq (a + 1)(n - 1) \leq (a + 1)n.$$

Dessutom är $a_1 = a \leq a + 1$. Alltså fungerar

$$\boxed{C = a + 1}.$$

□