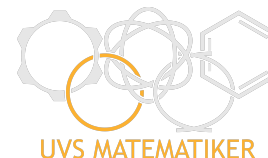


HÖJDPUNKTEN 2026

Öppen tävling den 20-21 mars 2026



Skrivtid: 5 timmar

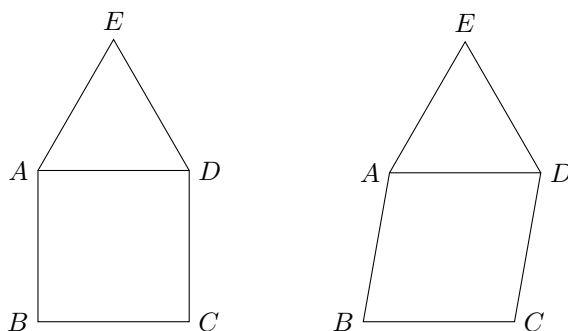
Hjälpmedel: endast penna, sudd, passare och linjal

Varje problem är värt 7 poäng. För full poäng krävs motivering om inget annat anges.

Behandla endast en uppgift per inlämnat papper och skriv lagnamn på varje sida.

Problem 1. En mataffär har ett erbjudande: Köp minst fyra frukter och få den billigaste gratis. Den första kunden köper tre apelsiner och en banan. Den andra köper tre apelsiner och två citroner. Den tredje köper två bananer och två citroner. Det visade sig att alla dessa tre kunder fick betala exakt 35 kr för sina frukter. Hitta styckpriset för varje frukt.

Problem 2. Bilden visar en tvådimensionell modell av ett hus bestående av sex lika långa linjesegment. En kraftig vindpust har gjort att husets väggar (AB och CD) har börjat luta (med en avvikelse mindre än 30° från sina ursprungliga riktningar). Bevisa att vinkeln $\angle BEC$ inte beror på denna lutning, och bestäm vinkelns storlek.



Problem 3. Hitta alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} p + q + r = s \\ p + 2q + 3r = 5t \end{cases}$$

där p , q , r , s och t är primtal.

Problem 4. Låt n vara ett positivt heltal. I det gamla slottet arbetar den kungliga glasmästaren med att skapa ett nytt fönster till tronhallen. Hon måste placera $\frac{1}{2}n(n+1)$ lila glasrutor och $\frac{1}{2}n(n-1)$ gula glasrutor i ett rutnät på $n \times n$ rutor så att inga två rader har samma antal lila rutor och inga två kolumner har samma antal lila rutor. På hur många sätt kan hon göra detta?

Problem 5. Låt $\triangle ABC$ vara en rätvinklig triangel med $\angle ABC = 90^\circ$ och $|AB| < |BC|$. Låt D vara en punkt på hypotenusan AC sådan att $|AB| = |BD|$. Punkten T ligger på sidan BC och är sådan att $\angle ATB = \angle CTD$. Visa att linjen genom D vinkelrätt mot BD delar sträckan CT på mitten.

Problem 6. En färgläggning av rutorna i ett $n \times n$ rutnät i färgerna röd och blå kallas för *elegant* om det är möjligt att gå mellan varje par av röda rutor, genom att gå mellan rutor med en gemensam sida, utan att behöva gå igenom någon tredje röd ruta. Låt $R(n)$ vara det största möjliga antalet röda rutor som en *elegant* färgläggning av ett $n \times n$ rutnät kan ha. Bestäm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{n^2}.$$

Problem 7. I Tallandet har alla städer ett positivt heltal som namn. Två invånare i Tallandet kan endast brevväxla om de bor i olika städer vars namn skiljer sig åt med en tvåpotens (notera att två invånare som bor i samma stad inte kan brevväxla). Givet att Tallandet har n invånare, vad är det största möjliga antalet par av invånare i Tallandet som kan brevväxla?

Problem 8. Matilda har ett udda primtal p och ett rutnät med n rader, där n är ett positivt heltal. På den k :te raden ($1 \leq k \leq n$) skriver hon ner siffrorna i talet kn i bas p , så att den i :te siffran (från höger) i talet hamnar i kolumn i för alla i .

Det visar sig att om Matilda väljer vilken kolumn som helst i rutnätet och summerar alla siffror som står i kolumnen är resultatet alltid delbart med p . Visa att p delar n .

Problem 9. Ulrik vill synkronisera sina n klockor som alla har stannat, där n är ett udda positivt heltal. Alla Ulriks klockor har en 12-timmars urtavla med en timvisare och en minutvisare. Dessa minutvisare kan Ulrik justera fram eller bak med en hastighet på 10 varv per minut. I värsta fall, hur länge måste Ulrik vrida visare om han väljer klockslaget han synkroniserar sina klockor till på ett optimalt sätt?

Problem 10. Låt $\triangle ABC$ vara en spetsvinklig triangel med ortocentrum H . Låt Γ vara cirkeln som går igenom H och som tangerar den omskrivna cirkeln av triangeln $\triangle ABC$ i A . Låt M vara medelpunkten av Γ . Antag att Γ skär linjerna BH och CH igen i punkterna D respektive E .

Bevisa att den omskrivna cirkeln av triangeln $\triangle MDE$ tangerar linjen BC .

Problem 11. Scott har ett oändligt stort papper med ett rutnät av liksidiga trianglar. Han klipper ut en sammanhängande figur genom att bara klippa längs rutnätets linjer. Sedan viker han ihop figuren på följande vis: varje vikning sker längs någon av rutnätets linjer och resulterar i att figurens area halveras. Efter ett ändligt antal sådana vikningar av figuren får han en triangelruta. Bevisa att det som var kvar av pappret efter att han klippte ut sin figur är sammanhängande.

[Med en sammanhängande del av rutnätet menar vi en mängd triangelrutor så att man kan gå mellan alla par av rutor i denna mängd genom att gå mellan rutor i mängden med gemensamma sidor.]

Problem 12. En oändlig sekvens r_0, r_1, r_2, \dots , består av rationella tal och för varje heltal $n \geq 1$ gäller det att r_n är ett nollställe till polynomet

$$x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \dots + r_0.$$

Visa att det finns ett tal N så att $r_n = r_N$ för alla $n > N$.