HÖJDPUNKTEN 2026

Gymnasietävling den 20 mars 2026

UVS MATEMATIKER

Skrivtid: 4 timmar
Hjälpmedel: endast penna, sudd, passare och linjal
Varje problem är värt 7 poäng. För full poäng krävs motivering om inget annat anges.
Behandla endast en uppgift per inlämnat papper och skriv lagnamn på varje sida.

Problem 1. En virrig tidsresare har hamnat i år 1 e.Kr. med endast en trasig tidsmaskin till hands. Tidsmaskinen har bara tre knappar som fungerar, och de gör följande:

- $(+1)$ — Hoppa ett år framåt.
- (-1) — Hoppa ett år bakåt.
- $(\times 3)$ — Tredubbla årtalet.

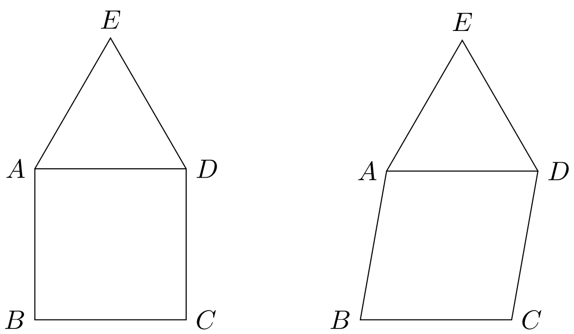
Tidsmaskinen har energi kvar för tio knapptryck, men inte fler än så. Beskriv hur tidsresaren kan komma tillbaka till år 2026 e.Kr. *(Endast svar krävs)*

Problem 2. John har två olika gräsklippare vid namn Alfons och Bosse som drar $8\,\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{tim}}$ respektive $6\,\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{tim}}$ bensin. För att jämföra de två använde han först Alfons för att klippa ena halvan av gräsmattan, och sen Bosse för att klippa andra halvan. Detta tog sammanlagt 15 minuter och förbrukade 1.7 dL bensin. Vilken gräsklippare förbrukade minst bränsle?

Problem 3. En mataffär har ett erbjudande: Köp minst fyra frukter och få den billigaste gratis. Den första kunden köper tre apelsiner och en banan. Den andra köper tre apelsiner och två citroner. Den tredje köper två bananer och två citroner. Det visade sig att alla dessa tre kunder fick betala exakt 35 kr för sina frukter. Hitta styckpriset för varje frukt.

Problem 4. Styrbjörn går runt i ett $n \times m$ rutnät, där $n \geq 2$ och $m \geq 2$ är heltal. Han börjar i ett av hörnen, och går därefter varje minut till en ruta som ligger intill (det vill säga delar en sida) men den ruta han befinner sig i just nu. Styrbjörn är lite rastlös av sig, och vill därför aldrig besöka samma ruta två gånger. Dessutom vill han aldrig gå två steg i rad i samma riktning. För vilka värden på n och m kan Styrbjörn besöka alla $n \cdot m$ rutor?

Problem 5. Bilden visar en tvådimensionell modell av ett hus bestående av sex lika långa linjesegment. En kraftig vindpust har gjort att husets väggar (AB och CD) har börjat luta (med en avvikelse mindre än $30°$ från sina ursprungliga riktningar). Bevisa att vinkeln $\angle BEC$ inte beror på denna lutning, och bestäm vinkelns storlek.



Problem 6. I det gamla slottet arbetar den kungliga glasmästaren med att skapa ett nytt fönster till tronhallen. Hon måste placera tio lila glasrutor och sex gula glasrutor i ett rutnät på $4{\times}4$ rutor så att inga två rader och inga två kolumner har samma antal lila rutor. På hur många sätt kan hon göra detta?

Problem 7. En kvadratisk matta är ihopsydd av kvadratiska tygbitar varav hälften är stora och hälften är små. De stora tygbitarna är 2×2 dm och de små är 1×1 dm. Lapparna är ihopsydda utan överlapp. Vad är den minsta möjliga storleken på denna matta?

Problem 8. Hitta alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} p+q+r=s \\ p+2q+3r=5t \end{cases}$$

där p, q, r, s och t är primtal.

Problem 9. Betrakta $n \geq 3$ punkter i planet varav inga tre ligger på en linje. Välj en av dessa och dra två linjer från den till två andra punkter. Då bildas en vinkel (vi väljer den mindre än $180°$). Vad blir resultatet om vi summerar alla möjliga sådana vinklar?

Problem 10. Låt $\triangle ABC$ vara en rätvinklig triangel med $\angle ABC = 90°$ och $|AB| < |BC|$. Låt D vara en punkt på hypotenusan AC sådan att $|AB| = |BD|$. Punkten T ligger på sidan BC och är sådan att $\angle ATB = \angle CTD$. Visa att linjen genom D vinkelrätt mot BD delar sträckan CT på mitten.

Problem 11. Hitta alla funktioner f, från de reella talen till de reella talen, som uppfyller att

$$f(f(x)+f(y)+yf(f(x))) = yf(f(x))+xf(x)$$

för alla reella tal x och y.

Problem 12. Låt a vara ett positivt heltal. Låt a_1, a_2, a_3, $\ldots$, vara den oändliga följd av positiva heltal som uppfyller att $a_1 = a$ och $a_{n+1} = a_n + \operatorname{sgd}(a_n, n)$ för alla positiva heltal n.

(a) Hitta alla möjliga värden på a så att $a_n \leq n + 2026$ för alla positiva heltal n.

(b) För varje positivt heltal a, bevisa att det existerar en konstant C sådan att $a_n \leq Cn$ för alla positiva heltal n.

[*Den största gemensamma delaren,* $\operatorname{sgd}(x,y)$, *av två heltal* x *och* y *är det största positiva heltalet som delar både* x *och* y.]