Tyngdpunkten 2025

Svårare

November 2025

Varje uppgift kan ge högst 10 poäng. Välmotiverade grafiska lösningar ger alltid full poäng. Lycka till!

1. The Force I en galax långt långt borta finns planeten Dagobah. Planeten rör sig i en cirkulär bana kring stjärnan Darlo (stjärnan är mycket tung, så ni kan anta att den inte rör sig). Gravitationskraften mellan planeten och stjärnan har storleken 6.2×10^{22} N och planetens massa är 8.5×10^{24} kg. Det tar 341 dagar för Dagobah att röra sig ett varv runt Darlo. Bestäm avståndet mellan planeten och stjärnan.

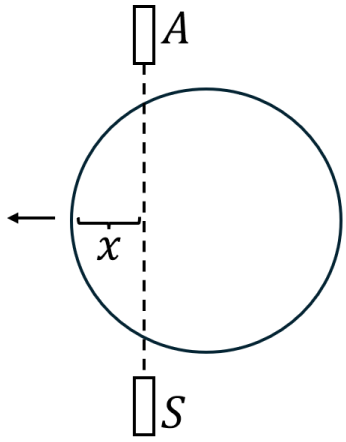
2. Regndroppar Två klotformade regndroppar faller från ett regnmoln. För den ena droppen tar det 7 minuter att nå marken och för den andra tar det 4 minuter. Bestäm förhållandet mellan regndropparnas radier. Antag att luftens densitet är konstant samt att vattendropparna når sin topphastighet nästan omedelbart.

Ledning: Luftmotståndet på en fallande kropp är en uppåtriktad kraft vars storlek ges av $F = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A$, där ρ är luftdensiteten, A är kroppens tvärsnittsarea, v är kroppens hastighet och C_D är en konstant (som är lika för dropparna).

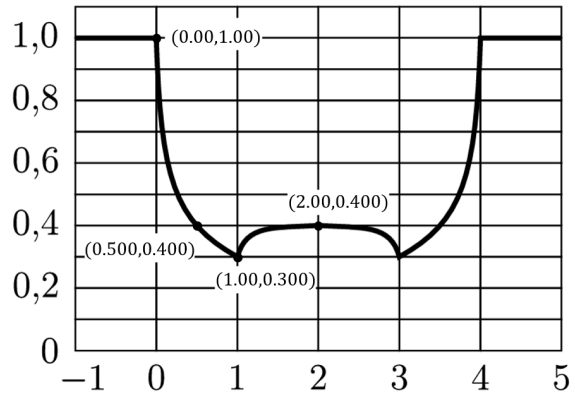
3. Rubidium Idag utgörs 27.83% av Jordens rubidiumatomer av den radioaktiva isotopen ^{87}Rb. Resterande atomer utgörs av den stabila isotopen ^{85}Rb. Halveringstiden för ^{87}Rb är 4.75×10^{10} år och ^{87}Rb sönderfaller till strontium, som är stabilt. Hur stor andel av rubidiumatomerna utgjordes av ^{87}Rb när solsystemet skapades för 4.6×10^9 år sedan, om vi antar att inga nya rubidiumatomer skapats sedan dess?

4. Guppande träbit Ett cylinderformat glas med radie R är fyllt till hälften med vatten. I glaset ligger en homogen, cylinderformad träbit med radie $r < R$ och massa m, vars bottenyta hela tiden är parallell med vattenytan. Träbiten har lägre densitet än vatten och flyter därför på ytan. När träbiten trycks ner och sedan släpps börjar den guppa upp och ner. Bestäm periodtiden för guppningen som funktion av R, r, m och densiteten ρ hos vatten. Du kan anta att någon del av träbiten alltid befinner sig ovanför ytan. Bortse från ytspänning, friktionsförluster och eventuella vågor på vattenytan.

5. Kriminologi En röntgenapparat (A) skickar ut strålar som tas upp av en sensor (S). Mellan röntgenapparaten och sensorn för man en cylinder med *tjocka* väggar (i figuren syns endast cylinderns kontur). Intensiteten av röntgenstrålen som mäts upp av sensorn beror på läget x som det visas i grafen. Använd Figur 1 för att bestämma om cylindern innehåller något (olagligt!) material som absorberar röntgenstrålar!



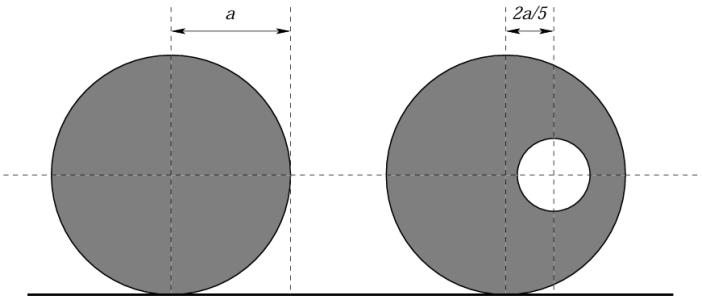
(a) En schematisk bild av uppställningen.



(b) Den uppmätta intensiteten som funktion av läget x. Några punkter har satts ut för tydlighets skull, och grafen är helt symmetriskt kring $x = 2$.

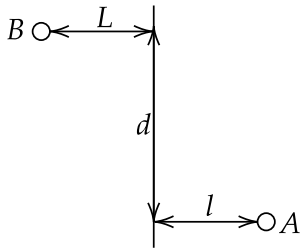
Figur 1: Figurer till uppgiften.

6. Cylinder med hål En homogen cylinder med radien a och massan 50 kg ligger på en horisontell yta. Ett cylindriskt hål borras genom cylindern med centrum på avståndet $\frac{2a}{5}$ från den ursprungliga cylinderns centrum (se Figur 2). Hålets axel är parallell med den ursprungliga cylinderns axel och deras centrum är belägna på samma höjd över ytan. Efter att hålet borrats väger cylindern istället 43 kg. För att cylindern ska ligga stilla tillämpas en horisontell kraft högst upp på cylindern. Bestäm denna kraft, till storlek och riktning.



Figur 2: Uppställningen.

7. Man ska vara snell Henrik står vid punkt A på en rak sandstrand ett avstånd $l = 20\,\text{m}$ från vattnet. Henrik ser sin kompis vid punkt B i vattnet, ett avstånd $L = 30\,\text{m}$ från stranden och dessutom ett avstånd $d = 80\,\text{m}$ från Henrik längs stranden. Henrik vill ta sig till sin kompis så snabbt som möjligt för att ge honom en komplimang. Han kan springa på land med en hastighet $v_l = 5.0\,\text{m/s}$ och kan simma med en hastighet $v_s = 2.0\,\text{m/s}$. Hur bör han planera sin färd för att ta sig till sin kompis så snabbt som möjligt? Hur lång tid tar det? Antag att Henrik börjar simma så fort han når vattnet. Se Figur 3.



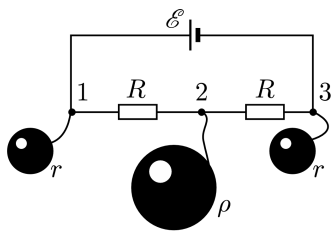
Figur 3: Illustration av Henrik och hans kompis.

8. Krets med laddade kulor Studera kretsen i Figur 4, bestående av en spänningskälla med EMK:n $\mathcal{E}$ och två seriekopplade resistorer, vardera med resistansen R. Till punkterna 1, 2 och 3 kopplas metallklot med radierna r, ρ respektive r via långa, tunna kablar. Bestäm laddningen på kulorna efter att de kopplats in (och en lång tid gått), om kulorna initialt var oladdade. Anta att laddningen hos själva kretsen och på kablarna är försumbart liten samt att spänningskällans inre resistans är 0. Anta också att avstånden mellan kulorna är mycket större än kulornas radier (vilket innebär att en kula i stort sett inte påverkar potentialen på en annan kula).

Ledning: Den elektriska potentialen på ett metallklot med laddning q och radie r (relativt en punkt mycket långt bort) ges av:

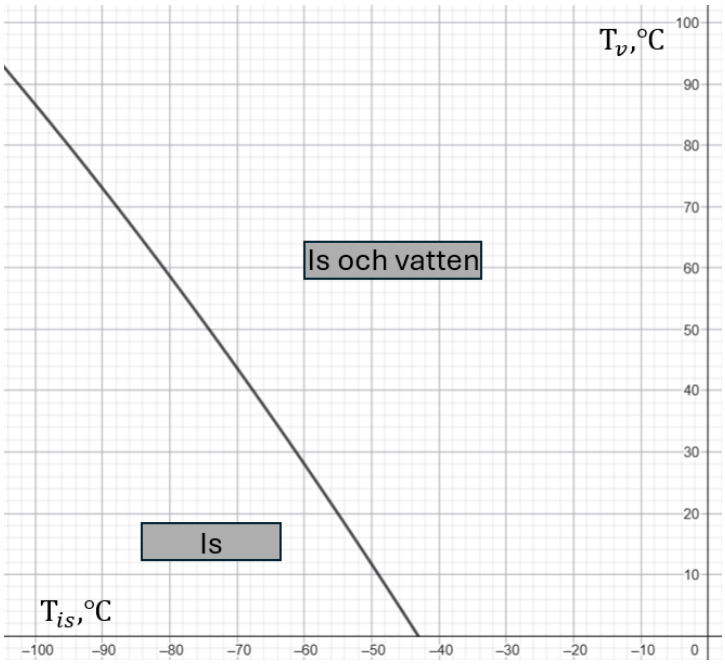
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

där ϵ_0 är en konstant.



Figur 4: En bild av uppställningen.

9. Is och vatten Du blandar vatten med massan m_v och is med massan m_{is} i en behållare. I Figur 5 visas sluttillståndet av blandningen beroende på vattnets starttemperatur T_v och isens starttemperatur T_{is}. Under kurvan i diagrammet blir allt vatten till is, och över kurvan blir resultatet en blandning av is och vatten.



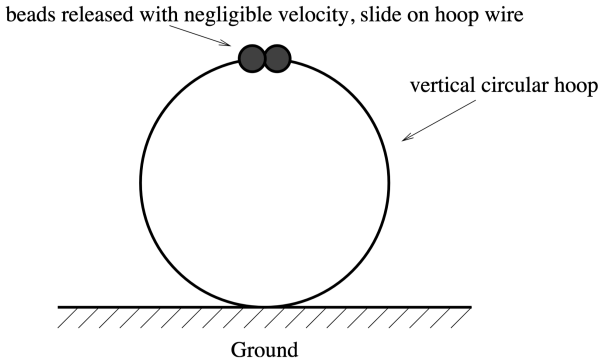
Figur 5: Slutresultatet vid blandning av is och vatten.

Isens specifika värmekapacitet varierar i det undersökta temperaturintervallet enligt $c_{is}(T_{is}) = c + \alpha T_{is}$, där $c = 2100\,\mathrm{J/(kg^\circ C)}$, T_{is} är isens temperatur i grader Celsius och α är en konstant. Vattnets specifika värmekapacitet är $2c$ och vattnets smältvärme (smältentalpi) är $\lambda = 2cT$, där $T = 80\,^\circ\mathrm{C}$. Använd Figur 5 för att bestämma α och $\gamma = m_{is}/m_v$. Bortse från behållarens uppvärmning och från alla värmeförluster.

Anmärkning: Du kan få delpoäng på uppgiften om du antar att $\alpha = 0$ och beräknar γ baserat på det. Du får då ett approximativt värde på γ.

10. Solsegelsproblem Ett reflekterande solsegel med arean A befinner sig på ett avstånd x från solen. Solseglet är vinkelrät mot solens strålar. Om solen totalt strålar ut effekten $P_\odot$, hur stor är då kraften från solens strålning på solseglet?

11. Hoppsan En styv ring med radie r står vertikalt med två pärlor längst upp, som i Figur 6. Pärlorna kan glida ner för ringen. Ringen har massan m och varje pärla har massan m_b. Pärlorna börjar glida ner för ringen åt olika håll med försumbar initialhastighet. Ringen förblir vertikal under hela förloppet. Bestäm det största värdet för $\frac{m_b}{m}$ så att ringen aldrig lämnar marken medan kulorna glider ner. Försumma friktionen.



Figur 6: Ring med pärlor.