

Tyngdpunkten 2025

Svårare

November 2025

1. The Force Låt a beteckna planetens centripetalacceleration, F centripetalkraften, m planetens massa, v planetens hastighet i den cirkulära banan och r avståndet mellan planeten och stjärnan. Formeln för centripetalacceleration samt Newtons andra lag ger $F = \frac{mv^2}{r}$. Vidare ges hastigheten av $v = \frac{2\pi r}{T}$ där T är periodtiden för cirkelrörelsen. Genom att kombinera dessa samband får vi

$$F = \frac{m \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2}{r} \implies r = \frac{FT^2}{4\pi^2 m}.$$

Insättning av värdena i uppgiften ger $r \approx 1.6 \times 10^{11}$ m.

2. Regndroppar Vi vill hitta ett samband mellan en regndroppes radie r och tiden t det tar för droppen att falla från ett moln. Låt m beteckna droppens massa, g tyngdaccelerationen, h höjden som droppen faller från och ρ_v densiteten hos vatten. Vi antar att droppen hela tiden färdas med sin topphastighet. Då sker ingen acceleration, så kraften från luftmotståndet är lika stor som tyngdkraften. Vi får

$$mg = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A. \quad (1)$$

Massan beror på radien enligt $m = \rho_v \frac{4\pi r^3}{3}$, tvärsnittsarean beror på radien enligt $A = \pi r^2$ och hastigheten beror på falltiden enligt $v = \frac{h}{t}$. Insättning av dessa samband i (1) ger

$$\left(\rho_v \frac{4\pi r^3}{3} \right) g = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{h}{t} \right)^2 C_D \cdot \pi r^2 \implies rt^2 = \frac{3\rho h^2 C_D}{8\rho_v g} \quad (2)$$

Notera nu att högerledet i (2) är precis samma för de två dropparna! Om vi betecknar den långsamma droppen med 1 och den snabba droppen med 2 gäller alltså

$$r_1 t_1^2 = r_2 t_2^2 \implies \frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^2 = \left(\frac{7}{4} \right)^2 = \frac{49}{16} \approx 3.$$

Den snabba droppens radie är alltså ungefär 3 gånger så stor som den långsamma droppens radie.

3. Rubidium Idag är andelen ^{87}Rb $\frac{N_{87}(t)}{N_{tot}(t)} = \frac{N_{87}(t)}{N_{87}(t) + N_{85}(t)} = 0.2783 \implies (1 - 0.2783)N_{87}(t) = 0.2783N_{85}(t)$. Vidare vet vi att $N_{87}(t) = N_{87}(0) \cdot 2^{-t/T} \implies N_{87}(0) = N_{87}(t) \cdot 2^{t/T}$ där T är halveringstiden. Vidare vet vi att $N_{85}(t)$ är konstant: alltså $N_{85}(t) = N_{85}(0)$. Vi vill nu lösa för $\frac{N_{87}(0)}{N_{85}(0) + N_{87}(0)} = \frac{N_{87}(t) \cdot 2^{t/T}}{\frac{1-0.2783}{0.2783} N_{87}(t) + N_{87}(t) \cdot 2^{t/T}}$ och insättning ger därvid att andelen var ungefär 29.2% vid solsystemets bildande.

4. Guppande träbit All rörelse kommer ske i vertikalt led. Notera att vattennivån inte är konstant utan förändras beroende på hur stor del av träbiten som är nedsänkt i vattnet. Antag att träbiten förskjuts avståndet Δx från jämviktsläget och låt Δh vara förändringen i vattenytans nivå. Volymbevarande ger

$$\pi(R^2 - r^2)\Delta h = -\pi r^2 \Delta x \implies \Delta h = -\frac{r^2}{R^2 - r^2} \Delta x.$$

Ändringen ΔV i den nedsänkta volymen blir alltså

$$\Delta V = \pi r^2 (\Delta h - \Delta x) = -\pi \frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2} \Delta x.$$

Den återdrivande kraften ΔF fås med Arkimedes princip till

$$\Delta F = \Delta V \rho g = -\pi \rho g \frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2} \Delta x. \quad (3)$$

Eftersom den återdrivande kraften är proportionell mot förskjutningen från jämviktsläget (med negativ proportionalitetskonstant) har vi en harmonisk oscillator! Ur (3) läser vi ut att fjäderkonstanten är

$$k = \pi \rho g \frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2}.$$

Formeln för periodtiden hos en harmonisk oscillator ger slutligen

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\sqrt{\frac{\pi m}{\rho g} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right)}.$$

5. Kriminologi Vi antar att det är det inte finns något olagligt material (presumption of innocence) och visar att det leder till en motsägelse. Vi noterar först att innerdiametern på behållaren måste vara 1 cm (det är där grafen får ett hack). Vi avläser nu att mängden absorberad strålning vid $x = 2$ cm är densamma som mängden absorberad strålning vid $x = 0.5$ cm. Alltså borde tjockleken på behållaren vara lika stor vid dessa x-koordinater. Men tjockleken vid $x = 2$ cm är 2 cm (väggen var 1 cm tjock enligt ovan), och tjockleken vid $x = 0.5$ cm ges av Pythagoras sats: $t = 2\sqrt{2^2 - 1.5^2} \approx 2.65 \text{ cm} > 2 \text{ cm}$. Detta ger en motsägelse!

6. Cylinder med hål Tre krafter verkar på cylindern: tyngdkraften, kraften från marken och kraften F som tillämpas högst upp på cylindern. Notera att kraften från marken är en kombination av normal- och friktionskraft och alltså *inte* är riktad rakt uppåt – i så fall skulle den enda kraften i horisontellt led vara den vi tillför högst upp, så cylindern skulle röra sig i sidled!

Då cylindern befinner sig i vila måste det totala vridmomentet på cylindern vara 0. Som momentpunkt väljer vi cylinderns kontaktpunkt med marken, vilket innebär att kraften från marken inte bidrar med något vridmoment (det finns dock andra rimliga val av momentpunkt). Innan hålet borrades var det totala vridmomentet på cylindern 0, men när hålet borrades försvann en del av vridmomentet riktat medurs. Kraften F som tillämpas på toppen måste alltså bidra med ett lika stort vridmoment M_1 medurs som materialet i hålet tidigare bidrog med, M_2 . Masscentrum för materialet som togs bort befann sig $\frac{2a}{5}$ längdenheter till höger om cylinderns mittpunkt och dess massa var $m = 7 \text{ kg}$. Vi får $M_1 = 2a \cdot F$ och $M_2 = \frac{2a}{5} \cdot mg$ (det senare genom enkel geometri), så

$$2a \cdot F = \frac{2a}{5} \cdot mg \implies F = \frac{mg}{5} \approx 14 \text{ N}.$$

Kommentar om alternativa lösningar: Uppgiften kan göras på många andra sätt – vi har fått in många kreativa lösningar! Exempelvis kan det nya masscentrumet beräknas relativt enkelt, varefter tyngdkraften kan antas verka på denna punkt. Man kan även notera att hålet är ekvivalent med att placera 7 kg extra vikt på andra sidan cylindern.

Det går också att välja momentpunkten som cylinderns mittpunkt. Då måste man dock ta hänsyn till friktionskraften från marken. Enligt kraftjämvikt är friktionskraften från marken lika stor som F och bidrar lika mycket till vridmomentet kring cylinderns centrum. Om man glömmer att ta hänsyn till friktionskraften kommer man alltså få ett svar som är dubbelt så stort som det riktiga!

7. Man ska vara snell Beroende på var Henrik hoppar ner i vattnet så kommer tiden det tar för honom att nå sin kompis variera. Vi kan notera att om han hoppar ned i vattnet ett avstånd x ovanför sin startposition så kommer han att springa $s_l = \sqrt{l^2 + x^2}$ på land och ett avstånd $s_s = \sqrt{(d-x)^2 + L^2}$. Vi vet därmed att $t = t_l + t_s = \frac{s_s}{v_s} + \frac{s_l}{v_l}$. Eftersom x, l, L, v_l och v_s alla är kända så är allt som nu måste göras att hitta det x så att tiden minimeras. Detta kan exempelvis göras genom att plotta $T(x)$. Detta kan göras direkt via exempelvis Geogebra eller så kan man hitta $T'(x) = 0$. Här blir

$$T'(x) = \frac{x}{v_l \sqrt{x^2 + l^2}} - \frac{d-x}{v_s \sqrt{(d-x)^2 + L^2}}.$$

Att lösa denna ekvation kräver dock också numeriska metoder. Svaret blir att det tar ungefär 30.3 sekunder med $x \approx 67.5 \text{ m}$.

8. Krets med laddade kulor Låt laddningen på respektive kula vara q_1, q_2 och q_3 . Eftersom kretsens och kablarnas laddning är försumbar och systemet initialt var oladdat gäller enligt laddningens bevarande att

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0.$$

Potentialen i punkt 1 är densamma som på det första klotet, för annars hade laddning strömmat mellan klotet och punkt 1. Således är potentialen i punkt 1 $V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$. Motsvarande formler gäller för potentialerna V_2 och V_3 i punkterna 2 och 3.

Eftersom strömmen genom de två resistorerna är lika stor (seriekoppling) och spänningen över batteriet är $\mathcal{E}$ gäller att spänningen över varje resistor är $\mathcal{E}/2$. Det ger de två ekvationerna:

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r} - \frac{q_2}{\rho} \right) = \mathcal{E}/2; \quad V_2 - V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2}{\rho} - \frac{q_3}{r} \right) = \mathcal{E}/2.$$

Dessa ekvationer löses tillsammans med ekvationerna för laddningens bevarande, och vi får:

$$q_2 = 0; \quad q_1 = -q_3 = 2\pi\epsilon_0 r \mathcal{E}.$$

9. Is och vatten Teckna uttrycket för kurvan mellan de två områdena. På denna kurva stelnar precis allt vatten, och slutresultatet blir is vid 0°C . Vattnet avger under nedkylningen temperaturen $Q_1 = 2cm_v t_v + m_v \lambda$. Isen tar upp värmeenergin $Q_2 = \int_{t_{is}}^0 c_{is} m_{is} dt = -(c + \frac{\alpha t_{is}}{2}) m_{is} t_{is}$. Eftersom $Q_1 = Q_2$ (inga värmeförluster) får vi att det på den utritade kurvan får vi efter lite algebra $t_v = -T - \frac{\gamma}{2} t_{is} - \frac{\alpha\gamma}{4c} t_{is}^2$. Genom att anpassa den senaste ekvationen till kurvan i figuren får vi värdet på parametrarna: $\gamma = 4$, $\alpha = 7.0 \text{ J}/(\text{kg} \cdot (^\circ\text{C})^2)$

10. Solsegelsproblem Antag att all strålning reflekteras. Då solen lyser på solseglet påverkas det av ett stråltryck, p_{rad} . Solseglet påverkas då av en kraft:

$$F = 2p_{rad}A$$

Storleken på stråltrycket ges av

$$p_{rad} = \frac{I}{c}$$

, då strålningen infaller vinkelrätt mot solseglet, där intensiteten

$$I = \frac{P_\odot}{4\pi x^2}$$

Kraften blir således

$$F = p_{rad}A = \frac{P_\odot A}{2\pi x^2 c}$$

Samma fås även genom att räkna med förändringen i rörelsemängden hos fotonerna. Vi får då att kraften är

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

, där Δp är skillnaden i rörelsemängden hos solseglet. Enligt rörelsemängdens bevarande gäller att $\Delta p = 2\frac{h}{\lambda} = \frac{2hf}{c}$. Kraften är alltså

$$F = \frac{2hf}{ct}$$

. Energin hos fotonerna som träffar seglet är

$$E = hf = P\Delta t = \frac{P_\odot A}{4\pi x^2} \Delta t$$

. Vi får slutligen

$$F = \frac{P_\odot A}{2\pi x^2 c}$$

11. Hoppsan Vi kan hitta hastigheten av en pärla som en funktion av vinkel från bottenläget genom att använda energi-principen. I termer av r , m_b , g och θ ges energin av:

$$\Delta U(\theta) = rm_b g(1 - \cos(\theta)) - 2rm_b g$$

$$\Delta K = -\Delta U = rm_b g(1 + \cos(\theta))$$

$$K_0 = 0 \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}m_b v^2$$

Pärulan rör sig längs med ringen, så rörelsen är cirkelrörelse. Det betyder att vi kan hitta pärlans centripetalkraft. Den ges av:

$$m_b v^2 = 2rm_b g(1 + \cos(\theta))$$

$$\frac{m_b v^2}{r} = 2m_b g(1 + \cos(\theta)) = F_c$$

Den resulterande kraften uppgörs av normalkraften mellan ringen och pärlan, samt kraften från gravitationen. Detta ger att:

$$F_c = N - m_b g \cos(\theta)$$

$$N = 2m_b g(1 + \cos(\theta)) + m_b g \cos(\theta) = m_b g(2 + 3\cos(\theta))$$

Därefter vill vi hitta den vertikala komponenten av normalkraftens motkraft på ringen. Den kommer att peka neråt då $\theta = 0$. Detta innebär att vertikala komponenten av kraften ges av:

$$N_y = -m_b g(2 + 3\cos(\theta))\cos(\theta)$$

Vi kan hitta den maximala kraften genom att maximera $(2 + 3\cos(\theta))\cos(\theta)$. Detta görs genom att ta derivatan med avseende på θ .

$$\frac{d}{d\theta}((2 + 3\cos(\theta))\cos(\theta)) = -2\sin(\theta) - 6\sin(\theta)\cos(\theta) = -2\sin(\theta)(1 + 3\cos(\theta))$$

Denna funktion är 0 då $\sin(\theta) = 0$ eller då $1 + 3\cos(\theta) = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = -\frac{1}{3}$. Vi vet att kraften måste peka neråt då $\sin(\theta) = 0$ eftersom det händer då θ är antingen 0 eller π . Därav måste extrempunkten som ligger mellan dem två vara en maximipunkt. Sätter vi in $\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$ så får vi:

$$N_y = \frac{1}{3}m_b g$$

Båda pärlorna utsätter ringen för denna kraft, och ringen får vertikal acceleration om denna kraft är större än gravitationskraften.

$$mg \geq \frac{2}{3}m_b g$$

Efter lite omflyttningar finner vi att den maximala ration av massorna är:

$$\frac{m_b}{m} \leq \frac{3}{2}$$