

Tyngdpunkten 2025

Lösningar - Lättare

November 2025

1. Lutande tornet i Pisa Eftersom luftmotståndet försummas och stenarna befinner sig nära jordytan har vi likformigt accelererad rörelse med acceleration $g = 9.82 \text{ m/s}^2$. Sträckan s i meter som stenarna färdats efter tiden $t = 3.4 \text{ s}$ ges därför av

$$s = \frac{gt^2}{2} \approx 57 \text{ m}.$$

2. Bräntbergsbravader Eftersom stenen glider friktionsfritt kommer dess lägesenergi enbart omvandlas till rörelseenergi. Alltså bevaras den mekaniska energin, och vi får att

$$mgh_A = mgh_B + \frac{mv_B^2}{2} \implies v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)},$$

där m är stenens massa, g tyngdaccelerationen, h_A och h_B är stenens höjd i punkt A respektive B och v_B är stenens fart i punkt B . Insättning av siffrorna i uppgiften ger $v_B \approx 27 \text{ m/s}$.

3. Den sjunkna katedralen a) Trycket vid botten ges av:

$$P = P_0 + \rho g H \approx 120 \text{ kPa}.$$

b) Om kroppen inte vore fastlimmad, utan vatten istället trängde in under den, hade kraften på kroppen (riktad uppåt) beräknats med Arkimedes princip:

$$F_L = \rho g V.$$

När kroppen limmas fast minskar lyftkraften, eftersom vattnet inte längre utövar något tryck på kroppens nedersta del. Minskningen av lyftkraften ges alltså av kraften som vattnet hade utövat på den fastlimmade ytan om limmet inte fanns:

$$F_A = P A = (P_0 + \rho g H) A.$$

Således ges kraften från vattnet på den fastlimmade kroppen (riktad uppåt) av:

$$F = F_L - F_A = \rho g V - (P_0 + \rho g H) A = -170 \text{ N}.$$

Som synes av minustecknet är kraften riktad nedåt!

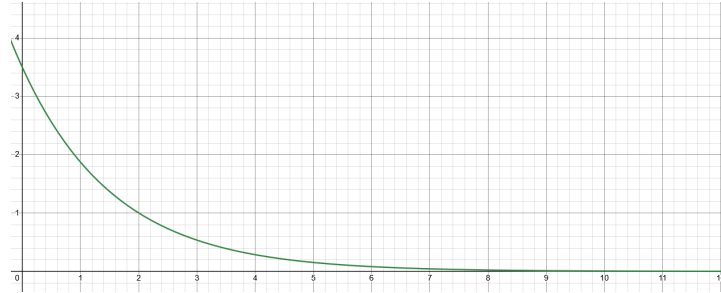
4. Svensk koldioxidproduktion Här är en möjlig lösning. Anta att 1 miljon svenskar kör 10 km/dag och bilarna drar 1 l/mil. Under ett år blir det $365 \times 10^6 \text{ l} \approx 4 \times 10^8 \text{ l}$. Antar att 1 l bränsle väger 1 kg. Massan hos en oktanmolekyl är 114 u (kan fås ur periodiska systemet). Massan hos en koldioxidmolekyl är 44 u. Eftersom varje oktanmolekyl enligt ledtråden ger upphov till 8 koldioxidmolekyler blir massan av den producerade koldioxiden ungefär $4 \times 10^8 \text{ kg} \cdot 8 \cdot \frac{44 \text{ u}}{114 \text{ u}} \approx 10 \times 10^9 \text{ kg}$.

5. Luftbubbla i Nydala! $PV = nRT \implies pV$ konstant i denna process ty isotherm $V_0 = \frac{4\pi r^3}{3} \implies V_{\text{efter}} = \frac{P_0 V_0}{P_{\text{efter}}}$
 $P(h) = \rho g h + P_0 \implies V_{\text{efter}} = \frac{4\pi r^3 (P_0 + 2\rho g)}{P_0 + \rho g}$

6. Två Laddade Plattor Det finns en spänningsskillnad mellan plattorna samt en resistans i denna krets. Spänningsskillnaden mellan plattorna är proportionell mot laddningsskillnaden. Ohms lag säger därför att $I = \frac{U}{R}$, vilket betyder att strömmen är proportionell mot spänningsskillnaden. Detta betyder att strömmen är proportionell mot laddningsskillnaden.

En liten stund efter $t = 0$ kommer en del av laddningen att ha flödat mellan plattorna. Detta betyder att laddningsskillnaden blir mindre, vilket betyder att strömmen blir mindre. Denna cykel fortsätter i all evighet. Eftersom laddningsskillnaden också är proportionell till strömmen så kommer den aldrig bli noll eftersom det skulle kräva att ingen ström flödar, vilket är motsägelsefullt.

Resultatet blir en funktion som ständigt minskar men aldrig når noll. Detta är karakteristiskt av en exponential-funktion. Grafen kommer därmed att ta denna form.



Figur 1: Graf för Resistor-Kondensator krets

En högre resistans skulle innebära en lägre initial ström, och därmed också långsammare minskning av strömmen.

7. Rubidium Idag är andelen ^{87}Rb $\frac{N_{87}(t)}{N_{\text{tot}}(t)} = \frac{N_{87}(t)}{N_{87}(t) + N_{85}(t)} = 0.2783 \implies (1 - 0.2783)N_{87}(t) = 0.2783N_{85}(t)$. Vidare vet vi att $N_{87}(t) = N_{87}(0) \cdot 2^{-t/T} \implies N_{87}(0) = N_{87}(t) \cdot 2^{t/T}$ där T är halveringstiden. Vidare vet vi att $N_{85}(t)$ är konstant: alltså $N_{85}(t) = N_{85}(0)$. Vi vill nu lösa för $\frac{N_{87}(0)}{N_{85}(0) + N_{87}(0)} = \frac{N_{87}(t) \cdot 2^{t/T}}{0.2783 N_{87}(t) + N_{87}(t) \cdot 2^{t/T}}$ och insättning ger därvid att andelen var ungefär 29.2% vid solsystemets bildande.

8. Kriminologi Vi antar att det är det inte finns något olagligt material (presumption of innocence) och visar att det leder till en motsägelse. Vi noterar först att innerdiametern på behållaren måste vara 1 cm (det är där grafen får ett hack). Vi avläser nu att mängden absorberad strålning vid $x = 2$ cm är densamma som mängden absorberad strålning vid $x = 0.5$ cm. Alltså borde tjockleken på behållaren vara lika stor vid dessa x-koordinater. Men tjockleken vid $x = 2$ cm är 2 cm (väggen var 1 cm tjock enligt ovan), och tjockleken vid $x = 0.5$ cm ges av Pythagoras sats: $t = 2\sqrt{2^2 - 1.5^2} \approx 2.65\text{cm} > 2\text{cm}$. Detta ger en motsägelse!

9. Regndroppar Vi vill hitta ett samband mellan en regndroppes radie r och tiden t det tar för droppen att falla från ett moln. Låt m beteckna droppens massa, g tyngdaccelerationen, h höjden som droppen faller från och ρ_v densiteten hos vatten. Vi antar att droppen hela tiden färdas med sin topphastighet. Då sker ingen acceleration, så kraften från luftmotståndet är lika stor som tyngdkraften. Vi får

$$mg = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A. \quad (1)$$

Massan beror på radien enligt $m = \rho_v \frac{4\pi r^3}{3}$, tvärsnittsarean beror på radien enligt $A = \pi r^2$ och hastigheten beror på falltiden enligt $v = \frac{h}{t}$. Insättning av dessa samband i (1) ger

$$\left(\rho_v \frac{4\pi r^3}{3}\right) g = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{h}{t}\right)^2 C_D \cdot \pi r^2 \implies rt^2 = \frac{3\rho h^2 C_D}{8\rho_v g} \quad (2)$$

Notera nu att högerledet i (2) är precis samma för de två dropparna! Om vi betecknar den långsamma droppen med 1 och den snabba droppen med 2 gäller alltså

$$r_1 t_1^2 = r_2 t_2^2 \implies \frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \approx 3.$$

Den snabba droppens radie är alltså ungefär 3 gånger så stor som den långsamma droppens radie.

10. Is och vatten Teckna uttrycket för kurvan mellan de två områdena. På denna kurva stelnar precis allt vatten, och slutresultatet blir is vid 0°C . Vattnet avger under nedkylningen värmen $Q_1 = c_v m_v T_v + m_v \lambda$. Isen tar upp värmeenergin $Q_2 = -c_{is} m_{is} T_{is}$. Eftersom $Q_1 = Q_2$ (inga värmeförluster) får vi efter lite algebra att linjen i diagrammet beskrivs av: $T_v = -\frac{\lambda}{c_v} - \frac{c_{is}}{c_v} \frac{m_{is}}{m_v} T_{is}$. Genom att anpassa den senaste ekvationen till kurvan i figuren får vi att $m_{is}/m_v = 4$.

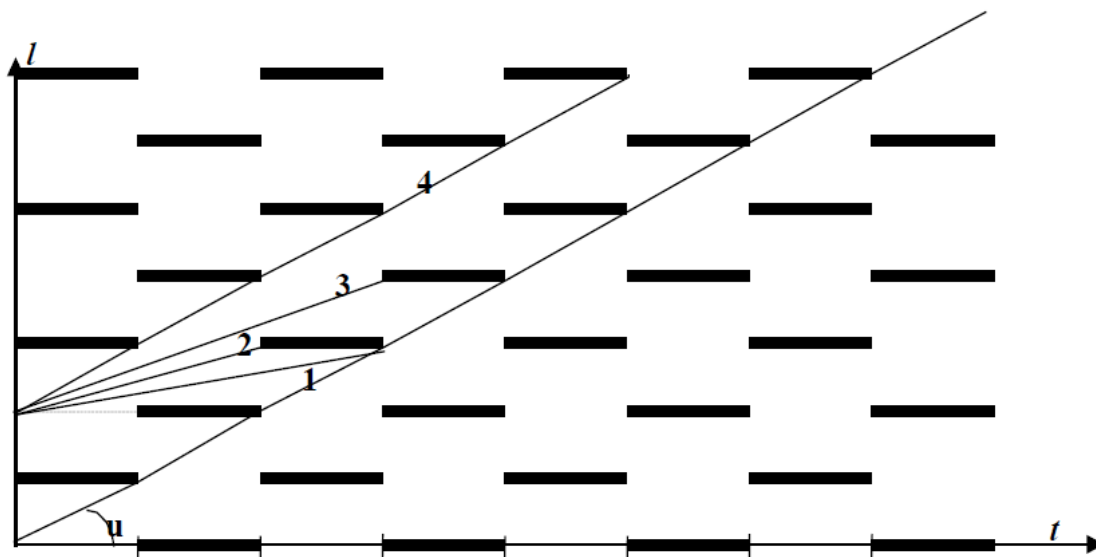
11. Fartdårar Situationen kan beskrivas med figuren nedan, där t -axeln motsvarar tiden och l -axeln motsvarar sträckan längs vägen. De fetmarkerade strecken motsvarar punkter med ett rödljus som lyser rött (i en viss punkt på vägen vid en viss tidpunkt). Längden på ett sådant sträck är alltså T .

En bils rörelse beskrivs av en linje i detta diagram. Om en linje ”krockar” med en fetmarkerad sträcka blir linjen horisontell. Den fortsätter sedan med samma lutning som tidigare en bit till höger, där den fetmarkerade sträckan tagit slut. De två bilarna möts när deras motsvarande linjer i diagrammet korsas.

Den bakre bilens hastighet är $v_0 = L/T$ (som synes ur diagrammet).

Den främre bilens hastighet kan anta olika värden. Vi undersöker speciellt de fyra linjerna i figuren.

1. Denna linje motsvarar hastigheten $v = L/3T$. De två bilarna krockar efter tiden $t = 3T$. Om den främre bilens hastighet är ännu mindre, $v < L/3T$, kommer bilarna mötas efter tiden $t = 2L/(v_0 - v)$ (de närmar sig varandra med farten $v_0 - v$ och ska totalt närma sig varandra med $2L$).
2. Denna linje motsvarar hastigheten $v = L/2T$. Här är tiden tills bilarna möts fortfarande $t = 3T$, eftersom den främre bilen når fram till rödljuset precis när det växlar om till rött. Samma tid fås för alla hastigheter mellan $v = L/3T$ och $L/2T$.¹
3. Denna linje motsvarar hastigheten $v = 2L/3T$. Här är tiden till kollision $t = 4T$. Detsamma gäller för alla värden på hastigheten mellan $v = L/2T$ och $v = 2L/3T$. På samma sätt blir tiden $t = 5T$ för hastigheter mellan $v = 2L/3T$ och $v = 3L/4T$ osv. Allmänt kolliderar bilarna efter tiden nT om hastigheten hos den främre bilen är $\frac{n-3}{n-2} \frac{L}{T} < v < \frac{n-2}{n-1} \frac{L}{T}$, där $n = 4, 5, 6, \dots$
4. Linjen motsvarar hastigheten $v = L/T = v_0$. Här kommer avståndet mellan bilarna alltid vara $2L$ och de kommer aldrig krocka. För $v > v_0$ kommer bilarna inte heller att krocka (den främre kommer alltid att vara minst $2L$ före).



Figur 2: Grafisk lösning av problemet.

¹Egentligen är det inte helt tydligt vad som händer när hastigheten är *exakt* $L/2T$: hinner bilen förbi rödljuset eller inte? Båda tolkningarna ger full poäng!