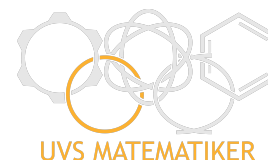


HÖJDPUNKTEN 2024

Lösningssförslag - Högstadietävling



Problem 1. Ett primtal är ett tal större än 1 som bara kan delas med 1 och sig självt.

- (a) Vilka är de 9 första primtalen? (*Endast svar krävs*)
- (b) Fyll i de 9 första primtalen i de oskuggade rutorna i figuren nedan så att summan i varje rad och kolumn slutar på 0. Varje tal ska användas exakt en gång. (*Endast svar krävs*)

Problem 1

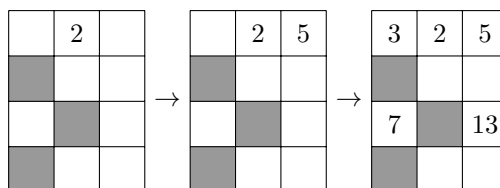
Lösningssförslag.

- (a) De första nio primtalen är 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 och 23.
- (b) Det finns flera lösningar. Här är ett exempel:

3	2	5
	7	23
17		13
	11	19

Hur hittar man den? Det går förstås att prova sig fram, men om vi är systematiska behöver vi inte göra så många gissningar!

- För att summan i översta raden ska sluta på 0 så måste minst ett av talen vara jämnt (om alla var udda så skulle ju summan också bli udda!). Samma sak gäller för mittersta kolumnen. Eftersom 2 är det enda jämna talet vi har, så vi måste vi placera 2:an som i första bilden nedan.
- Om 5:an placeras i en rad med endast två rutor så måste det andra talet i den raden också sluta på 5. Men vi har inga andra tal som slutar på 5. Alltså måste 5:an placeras i översta raden. Samma resonemang ger att 5:an inte kan vara i första kolumnen. Då återstår endast att placera 5:an som i andra bilden nedan.



- Nu måste vi placera 3, 13 eller 23 längst upp till vänster för att summan i första raden ska sluta på 0. Därefter ser vi att vi måste placera 7 eller 17 längst till vänster i tredje raden, och sen antingen av 3, 13 eller 23 längst till höger i tredje raden. För de sista fyra talen kan vi prova oss fram.

□

Anmärkning. Eftersom det enda vi bryr oss om är slutsiffran i summan av varje rad och kolumn, så kan vi till exempel alltid byta plats på 7 och 17 utan att det påverkar vår lösning. Av samma anledning kunde vi i sista steget ovan välja vilken vi vill av 3, 13 eller 23 längst upp till vänster utan att behöva göra några gissningar, och så vidare.

Problem 2. Julia har klurat ut ett sätt att aldrig få slut på saft! Varje gång hon druckit upp halva sitt glas, fyller hon på med vatten så det blir fullt igen. På så sätt tar det aldrig slut. Problemet är att saften blir lite svagare för varje gång.

Julia började med att blanda en tillbringare med 1 skopa koncentrerad saft och 5 skopor vatten. Efter det har hon druckit upp halva glaset och fyllt på med vatten tre gånger.

- (a) Hur stor är andelen koncentrerad saft i glaset nu?
- (b) Julia vill gärna att saften ska smaka bra igen. Hon tänker därför dricka en del av den alldeles för svaga saften, och sen fylla på med mer koncentrat istället för vatten. Hur stor del av glaset ska hon dricka för att koncentrationen ska bli samma som den var från början?

Lösningsförslag 1.

- (a) Andelen koncentrat är

$$\frac{\text{mängd koncentrat}}{\text{mängd vätska totalt}}$$

så i början är den $\frac{1}{6}$ (det finns 1 skopa koncentrat och 6 skopor vätska). Varje gång Julia dricker halva glaset så halverar hon *mängden* koncentrat. Eftersom hon fyller på vatten tills glaset är fullt igen, så ändras däremot inte totala mängden vätska. Alltså halveras även andelen, och detta upprepas tre gånger. Andelen saft i slutet blir därmed

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{48}$$

- (b) Säg att Julia dricker upp andelen x av saften och fyller på resten med saft. Andelen saft kvar blir då

$$\frac{1}{48}(1-x) + x$$

Resten löses med algebra.

$$\begin{aligned} \frac{1}{48}(1-x) + x &= \frac{1}{6} \\ \iff 1-x+48x &= 8 \\ \iff 47x &= 7 \\ \iff x &= \frac{7}{47} \end{aligned}$$

Svar: Julia ska dricka sju 47:e-delar av saften i glaset.

□

Lösningsförslag 2. Vi löser problem (a) på samma sätt som i förra lösningsförslaget. Men för (b) kan vi komma undan utan att skriva upp en ekvation!

Notera att i början så var andelen vatten $\frac{5}{6}$. Efter att Julia tre gånger druckit hälften av glaset och fyllt på med vatten så är andelen $\frac{47}{48}$, enligt (a). Eftersom hon inte kommer fylla på med nytt vatten så måste mängden vatten hon dricker innan hon fyller på med koncentrat igen vara exakt

$$\frac{47}{48} - \frac{5}{6} = \frac{47}{48} - \frac{40}{48} = \frac{7}{48}$$

För att dricka den mängden vatten så måste mängden vätska hon dricker vara

$$\frac{48}{47} \cdot \frac{7}{48} = \frac{7}{47}$$

eftersom hon för varje 47 delar vatten också dricker 1 del koncentrat (så mängden vätska är $1+47=48$ för varje 47 delar vatten). □

Problem 3. Rektorn på din skola ville räkna hur många elever som var på skolgården. Hon visste att det finns som mest 300 elever, för det är så många som går på skolan totalt. Plötsligt fick hon en idé! Hon bad alla elever att ställa sig i grupper om 5, och det visade sig att det gick jämnt ut. Sen bad hon alla elever ställa sig i grupper om 9. Det visade sig då att det i den sista gruppen bara blev 7 elever, medan det i alla andra var exakt 9. Till sist bad hon alla ställa sig i grupper om 4, och då gick det också jämnt ut! Hur många elever var det på skolgården?

Lösningsförslag 1. Det minsta talet som är delbart med både 4 och 5 är 20. Antalet elever måste alltså vara en multipel av 20. Om vi testar alla multiplar av 20 mellan 0 och 300 så hittar vi att 160 är den enda som ger rest 7 vid division med 9. $\square$

Lösningsförslag 2. Det går att lösa problemet utan att testa så många tal! Precis som i förra lösningen så vet vi att antalet elever slutar på 0 (eftersom det är delbart med både 4 och 5). Men vi vet också att om vi tar bort 7 personer så får vi ett antal som slutar på 3 och är delbart med 9. Nu kan vi räkna baklänges! Ett tal som gånger 9 slutar på 3 måste själv sluta på 7, vilket ger oss följande möjligheter för antalet elever:

- $9 \cdot 7 + 7 = 70$
- $9 \cdot 17 + 7 = 160$
- $9 \cdot 27 + 7 = 250$
- ...

Av dessa tre möjligheter så är det endast 160 som funkar (för de andra är inte delbara med 4). Dessutom så kommer alla större tal i listan vara för stora eftersom det finns max 300 elever. Så svaret är 160. $\square$

Lösningsförslag 3. Eftersom det är max 300 elever, så är antalet som mest ett tre-siffrigt tal, säg ABC .

Precis som ovan får vi att antalet elever måste vara delbart med 20. Det innebär att det sluta på 0, så $C = 0$. Dessutom måste siffran B vara jämn.

Vi vet också att antalet *hade* varit delbart med 9 om det fanns två elever till. Med andra ord så måste talet $AB2$ vara delbart med 9. Men ett tal som är delbart med 9 har också siffersumma delbart med 9, så vi får att $A + B + 2$ är delbart med 9.

Nu provar vi alla möjligheter för B (som vi vet är jämnt):

- $B = 0$ ger $A = 7$ för att summan ska vara delbar med 9, men 700 är för stort.
- $B = 2$ ger $A = 5$ för att summan ska vara delbart med 9, men 920 är för stort.
- $B = 4$ ger $A = 3$ för att summan ska vara delbar med 9, men 340 är för stort.
- $B = 6$ ger $A = 1$ för att summan ska vara delbar med 9, och 160 funkar!
- $B = 8$ ger $A = 8$ för att summan ska vara delbar med 9, men 880 är för stort.

$\square$

Anmärkning. Det går att bevisa att siffersumman av ett tal alltid har samma rest vid division med 9 som talet självt. Det beror på att $1000\dots0 = 999\dots9 + 1$, och därför kan vi skriva talet med siffor $ABC\dots Z$ som

$$ABC\dots Z = (999\dots9A + 99\dots9B + 9\dots9C) + (A + B + C + \dots + Z)$$

Problem 4. Femhörningen i mitten är regelbunden. Hur stor andel av stjärnan är färglagd?



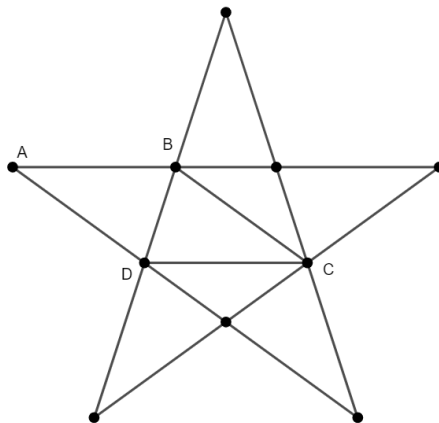
Problem 4

Lösningförslag. Rita en till diagonal i den inre femhörningen. Både det gula och det vita området består då av tre stora trianglar och två små trianglar. Båda områdena är alltså lika stora förutsatt att den mittersta triangeln är kongruent med de yttersta. Att de är kongruenta kan man exempelvis visa med följande resonemang:

Namnge punkterna A, B, C, D som i bilden. Eftersom $\triangle ABD$ är likbent så är $\angle ABD = \angle ADB$. Triangeln $\triangle BCD$ är också likbent, därav $\angle CDB = \angle CBD$. Dessutom är AB och CD parallella, därav $\angle ABD = \angle CDB$. Sammanfattningsvis är

$$\angle ABD = \angle ADB = \angle CBD = \angle CDB,$$

vilket enligt vinkel-sida-vinkel innebär att $\triangle ABD$ och $\triangle CBD$ är kongruenta och alltså har samma area. $\square$



Problem 4 - lösning

Problem 5. Bland talen från 1 till 12 finns det tillsammans 5 stycken 1:or. Hur många 1:or finns det bland talen 1 till 2024 tillsammans?

Lösningsförslag 1. • Bland talen 1 till 999 finns det 100 ettor i entalsposition, 100 ettor i tiotalposition, 100 ettor i hundratalposition. Totalt 300 ettor.

- Bland talen 1000 till 1999 finns det 1000 ettor i tusentalpositioner plus lika många ettor som innan i de andra positionerna. Totalt 1300 ettor.

- Bland talen 2000 till 2024 finns det 10 ettor i tiotalposition och tre ettor i entalsposition. Totalt 13 ettor.

Allt som allt finns det alltså $300+1300+13=1613$ ettor bland talen 1 till 2024. □

Lösningsförslag 2. Bland talen upp till 2024 så är det exakt:

- $203 = \lceil \frac{2024}{10} \rceil$ stycken som har entalsciffran 1.
- $210 = 10 \cdot \lceil \frac{2024}{100} \rceil$ stycken som har tiotalssiffran 1.
- $200 = 100 \cdot \lceil \frac{2024}{1000} \rceil$ stycken som har hundratalssiffran 1.
- $1000 = 1000 \cdot \lceil \frac{2024}{10000} \rceil$ stycken som har tusentalssiffran 1.

Totalt blir det $1000 + 200 + 210 + 203 = 1613$ ettor bland talen 1 till 2024. □

Lösningsförslag 3. Om man inte inser att det går att räkna entalsiffror, tiotalssiffror och hundratalssiffror separat så går det fortfarande att lösa problemet genom att dela upp talen mellan 1 och 2024 på något smart sätt och räkna antalet i varje grupp! Det finns mängder av sätt att göra detta på, här är en möjlighet:

- Mellan 0 och 99 så finns det så få tal att vi kan skriva upp dem alla och räkna antalet ettor. Det visar sig att det finns 20 stycken.
- Mellan 100 och 199 så är antalet ettor exakt samma som i gruppen ovan eftersom de två sista siffrorna är samma som innan, förutom att vi också får 100 extra ettor då varje tal börjar på 1. Totalt ger det 120 ettor i denna grupp.
- Mellan 200 och 299 finns det 20 ettor eftersom den ser likadan ut som den första gruppen (utom att det finns en tvåa i början av varje tal som inte påverkar antalet ettor).
- På samma sätt finns det 20 ettor för varje hundratal mellan 300 och 999.

Om vi lägger ihop alla ettor från 0 till 999 får vi alltså 20 stycken per hundratal, plus 100 extra mellan 100 och 199 - totalt ger det $20 \cdot 10 + 100 = 300$.

Efter detta kan vi fortsätta som från andra punkten i lösningsförslag 1. □

Problem 6. Exakt vid midnatt till fredagen den 13, så skapar den galna professorn Sonja ett 1 kilo tungt slimemonster. Det växer sig 12 gånger så stort på en timme, och klockan 01:00 delar det upp sig i 12 mindre slimes. Alla dessa växer sig sedan 24 ($= 2 \cdot 12$) gånger så stora, och klockan 02:00 delar de upp sig i 11 mindre slimes var. Deras avkommor växer sig i sin tur 36 ($= 3 \cdot 12$) gånger så stora, och klockan 03:00 delar de upp sig i 10 mindre slimes o.s.v. Denna reproduktion pågår ända till klockan 12:00 på dagen. Visa att varje slime då väger mer än en miljard ton.

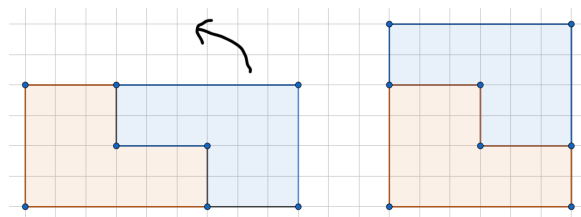
Lösningsförslag. I slutändan finns det totalt $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 2 \cdot 1$ slimes. Tillsammans väger de $12 \cdot 24 \cdots 132 \cdot 144$ kg. Vikten av varje enskild slime i slutet är därmed

$$\begin{aligned} \frac{12 \cdot 24 \cdot 36 \cdots 120 \cdot 132 \cdot 144}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} &= \frac{12 \cdot 24 \cdot 36 \cdots 120 \cdot 132 \cdot 144}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 10 \cdot 11 \cdot 12} \\ &= \frac{12}{1} \cdot \frac{24}{2} \cdots \frac{132}{11} \cdot \frac{144}{12} \\ &= \underbrace{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdots 12 \cdot 12}_{12 \text{ st}} \\ &> \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdots 10 \cdot 10}_{12 \text{ st}} \\ &= 1 \text{ biljon} \end{aligned}$$

Varje slime väger alltså mer än 1 biljon kilogram $=$ 1 miljard ton (ett ton är 1000 kg och 1 biljon är 1000 miljarder). $\square$

Problem 7. Tilda har en rektangulär bräda som är 9 cm lång och 4 cm bred. Hur kan hon såga isär den i två delar som hon kan sätta ihop till en kvadrat?

Lösningsförslag. Tilda kan dela upp brädan som i bilden nedan:

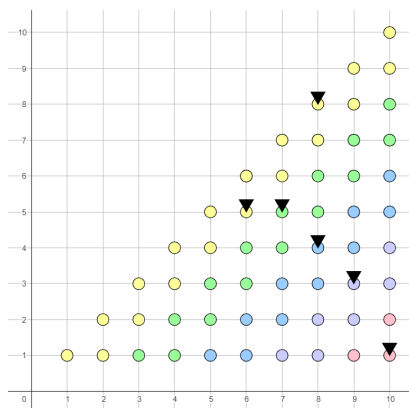


Problem 7 - lösning

□

Problem 8. En brevbärare har sex rektangulära brev med sidlängder som är heltal mellan 1 och 10. Visa att något av breven kan täcka ett annat av breven.

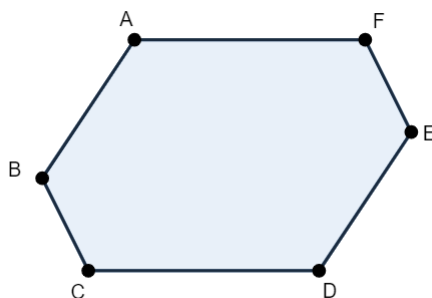
Lösningsförslag. Man kan tänka på breven som punkter i ett koordinatsystem. Låt x -komponenten vara längden på brevet längs x -axeln och y -komponenten längden av brevet längs y -axeln. Eftersom $x \geq y$ så kommer alla punkter uppfylla $x \geq y$. Vi får då sex punkter som i figuren nedan:



Problem 8 - lösning

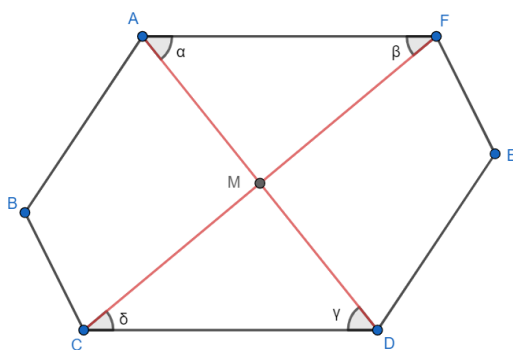
Vi har delat in punkterna i fem remsor baserat på differensen $x - y$. Enligt lådprincipen måste åtminstone två brev (vi kan kalla dem brev 1 och brev 2) vara i samma remsa. De uppfyller då att $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$. Utan inskränkning, anta att $x_1 \geq x_2$. Då måste även $y_1 \geq y_2$, vilket innebär att brev 1 kan täcka brev 2. $\square$

Problem 9. Givet är en konvex hexagon $ABCDEF$ där motsatta sidor är parallella och lika långa, alltså att $AB = DE$, $BC = EF$ och $CD = FA$. Bevisa att de tre linjerna AD , BE och CF skär varandra i en punkt.



Problem 9

Lösningssförslag 1. Rita in AD och FC samt vinklarna α , β , γ och δ som i bilden. Eftersom AF och CD är parallella så måste $\alpha = \gamma$ och $\beta = \delta$ (alternativvinklar). Enligt vinkel-sida-vinkel innebär detta att triangelarna $\triangle AFM$ och $\triangle CDM$ är kongruenta (vi vet ju att $AF = CD$ enligt uppgiften). Alltså får vi att $AM = MD$ och att $FM = MC$. Det innebär att FC delar upp AD i två lika långa delar: AM och MD . Om vi istället ritar ut diagonalerna AD och BE så kan vi på samma sätt visa att BE delar upp AD i två lika långa delar. BE och FC korsar alltså båda AD i samma punkt (dess mittpunkt). Så alla tre linjer skär varandra i samma punkt.



Problem 9 - lösning

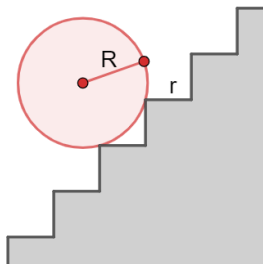
□

Lösningssförslag 2. Låt M vara mittpunkten på AD . Om vi roterar hela figuren 180° kring punkten M så kommer:

- A att hamna på punkten D , och vice versa.
- Segmentet AF hamna på segmentet DC . Det är för att ...
- På samma sätt så hamnar segmentet AB på segmentet DE .

I synnerhet så kommer punkterna A, D att byta plats, F, C att byta plats och B, E byta plats. Men att rotera hela figuren 180° runt punkten M är samma sak som att spegla hela figuren i punkten M . Detta innebär alltså att B och E måste vara speglingar av varandra i punkten M , så linjen BE måste gå genom punkten M . På samma sätt får vi att linjen CF måste gå genom punkten M , så alla tre diagonaler går genom en och samma punkt. □

Problem 10. Ett hjul med radie R rullar uppför en trappa vars steg är kvadrater med sidlängd $r < R$. Det är givet att $R^2 = 2r^2$. Hur många trappsteg behöver hjulet rulla upp för innan det roterat ett helt varv?



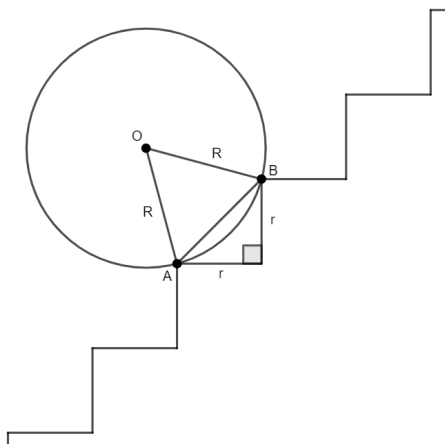
Problem 10

Lösningförslag. Rita ut punkterna A , B och O som i bilden. Sträckorna AO och BO är radier till cirkeln och har alltså längderna R . Sträckan $|AB|$ hittas med Pythagoras sats:

$$|AB|^2 = r^2 + r^2 = R^2. \quad \implies \quad |AB| = R.$$

där vi använde oss av att $R^2 = r^2 + r^2$ enligt uppgiften.

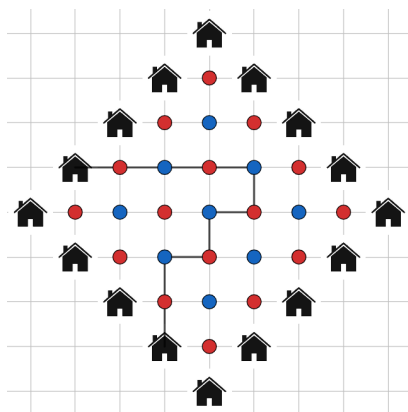
I triangeln $\triangle ABO$ är alltså alla sidor lika långa (de har alla längd R). I en sådan triangel är alla vinklar 60° . Hjulet kommer alltså rulla 60° varje steg. Ett helt varv är 360° , det vill säga 6 steg.



Problem 10 - lösning

□

Lösningsförslag. Färga pickarna röda och blå som nedan. Den första prickén i varje stig är röd. Därefter är varannan blå och varannan röd tills den slutar återigen på en röd prick. Därmed passerar varje stig ett udda antal prickar. Totalt finns det $16/2 = 8$ stigar, så det totala antalet prickar i alla stigar är summan av åtta udda tal. Men summan av åtta udda tal är alltid ett jämnt tal. Alla stigar måste alltså tillsammans passera genom ett jämnt antal prickar. Men i byn finns det 25 prickar, vilket inte är jämnt. Alltså kan inte alla prickar passeras. $\square$



11