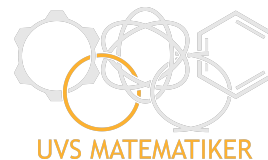


HÖJDPUNKTEN 2024

Lösningssförslag - Gymnasietävling



Problem 1. Mio har $3^{4^{5^2}}$ korvar och $9^{2^{7^2}}$ korvbröd. Räcker korvbröden till alla korvar?
Anmärkning: potensstorn beräknas uppifrån ner. 2^{2^3} betyder alltså 2^8 och inte 4^3 .

Lösningssförslag. Antalet korvar är

$$3^{4^{5^2}} = 3^{4^{25}} = 3^{2^{50}}.$$

Antalet korvbröd är

$$9^{2^{7^2}} = 9^{2^{49}} = (3^2)^{2^{49}} = 3^{2 \cdot 2^{49}} = 3^{2^{50}}.$$

Det finns alltså lika många korvar som korvbröd.

Svar: Ja, korvbröden räcker.

□

Problem 2. Sebastian har 100 kulor i 10 olika färger, men det kan finnas olika många av de olika färgerna. Han vill placera dem i 10 högar med 10 kulor i varje hög. Visa att han kan garantera att det är max två olika färger i varje hög.

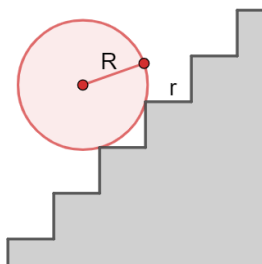
Lösningsförslag. Vi bevisar detta med induktion.

Basfall: Om Sebastian har 10 kulor i 1 färg kan han självfallet lägga alla i en hög utan fler än två färger.

Induktionshypotes: Om Sebastian har $10n$ kulor med n färger så kan han lägga dem i n högar med max två färger i varje hög.

Induktionssteg Om Sebastian har $10(n+1)$ kulor med $n+1$ färger så måste det (enligt lådprincipen) finnas någon färg A som förekommer max 10 gånger, och någon färg B som förekommer minst 10 gånger. Välj nu en hög med 10 kulor som består av alla kulor med färg A , och där resterande har färg B . Efter det återstår $10n$ kulor med n färger (eftersom alla kulor med färg A nu är borta). Resterande kulor kan sorteras enligt vår induktionshypotes. $\square$

Problem 3. Ett hjul med radie R rullar uppför en trappa vars steg är kvadrater med sidlängd $r < R$. Det är givet att $R^2 = 2r^2$. Hur många trappsteg behöver hjulet rulla upp för innan det roterat ett helt varv?



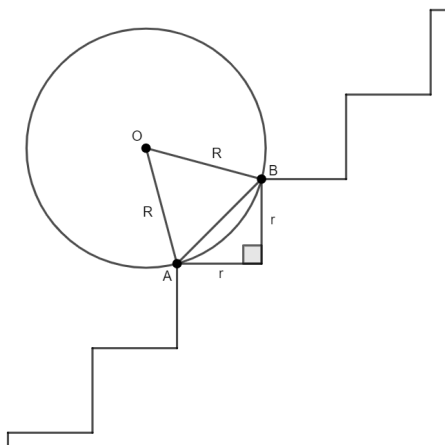
Problem 3

Svar: 6

Lösningförslag. Rita ut punkterna A , B och O som i bilden. Sträckorna AO och BO är radier till cirkeln och har alltså båda längden R . Sträckan $|AB|$ hittas med pythagoras sats:

$$|AB|^2 = r^2 + r^2 = R^2. \quad \implies \quad |AB| = R.$$

Triangeln $\triangle ABO$ är alltså liksidig, vilket innebär att alla dess vinklar är 60° stora. Hjulet kommer alltså rulla 60° varje steg. Ett helt varv är 360° , det vill säga 6 steg.



□

Problem 4. Visa att det finns oändligt med lösningar till ekvationen $a!b! = c!$ där a, b och c är heltal större än eller lika med 2.

Anmärkning: $n!$ betecknar produkten av alla positiva heltal mindre än eller lika med n .

Lösningsförslag. Låt a vara ett godtyckligt heltal större eller lika med 3. Sätt sedan $c = a!, b = a! - 1$. På detta sätt blir

$$a!b! = a!(a! - 1)! = c(c - 1)! = c!.$$

Ytterligare blir både $a, b, c \geq 2$. Vi får alltså en lösning för varje värde på a , det vill säga oändligt många lösningar. $\square$

Exempel:

$$\text{Om } a = 3: \quad 3! \cdot 5! = 6!$$

$$\text{Om } a = 4: \quad 4! \cdot 23! = 24!$$

$$\text{Om } a = 5: \quad 5! \cdot 119! = 120!$$

Problem 5. Vilket är det största talet vars alla siffror är olika, och som är delbart med alla sina siffror?

Svar: 9867312

Lösningförslag. Först och främst så vill vi såklart ha ett tal med så många siffror som möjligt. Vi börjar med att visa att vi kan ha max 7 stycken siffror, och att dessa siffror i så fall måste vara 1, 2, 3, 6, 7, 8 och 9.

- Inget tal (utom 0) är delbart med 0. Alltså måste vi definitivt ta bort 0.
- Om vi har med 5 måste talet sluta på 0 eller 5. Vi har redan tagit bort 0, och om det slutar på 5 är det udda så vi måste ta bort alla jämna siffror, vilket lämnar oss med endast 5 siffror. Vi vill ha minst 7 siffror, så vi måste ta bort 5.
- Nu återstår endast 8 siffror: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Vi kan inte ha kvar alla dessa för deras siffersumma är 40, vilket inte är delbart med 9 (och alltså kan inget tal med dessa siffror vara delbart med 9, enligt delbarhetsregeln för 9). Om vi endast vill ta bort en siffra till så måste vi alltså antingen ta bort 4 (för då blir siffersumman 36 vilket är delbart med 9), eller så tar vi bort 9 självt. I det senare fallet blir siffersumman dock 31 vilket inte är delbart med 3, så det funkar inte eftersom 3 fortfarande är kvar. Alltså måste vi ta bort 4 om vi ska ha någon chans att hitta ett tal med 7 siffror.

Ovan har vi visat att vi antingen måste ha färre än 7 siffror, eller siffrorna 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9. Låt oss nu visa att det finns ett tal som består av dessa siffror som är delbart med alla sina siffror, och hitta det största sådana talet.

Vi vill hitta ett tal som är delbart med 1, 2, 3, 6, 7, 8 och 9, och som har dessa siffror. Notera att:

- Alla tal är delbara med 1.
- Alla tal med dessa siffror är delbara med både 3 och 9 eftersom siffersumman är delbar med 9.
- Om vi lyckas se till att talet även är delbart med 7 och 8 så får vi automatiskt att det även är delbart med 2 och 6, eftersom delbarhet med 8 ger att talet är jämnt och delbarhet med 3 tillsammans med att det är jämnt ger att det är delbart med 6.

Vi kan alltså koncentrera oss på att hitta tal med dessa siffror som är delbara med 7 och 8. Vi börjar med 9876321, det största talet som består av dessa siffror, och provar sen alla möjligheter från störst till minst tills vi hittar något som funkar. Vi får att alla möjliga *jämna* tal som börjar med 987 är:

9876312, 9876132, 9873612, 9873216,
9873162, 9873126, 9872316, 9872136,
9871632, 9871362, 9871326, 9871236.

och av dessa är det endast 9876312, 9873216, 9872136 och 9871632 som är delbara med 8. Men ingen av dem är delbara med 7. Nästa tal vi provar blir då 9867321 och 9867312 där det tidigare inte funkar eftersom det är udda, och det senare är vårt svar (det är enkelt att kolla att det är delbart med både 7 och 8).

□

Problem 6. Vad är heltalsdelen i talet $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}$?

Lösningförslag 1. Låt $s = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{20}$. Å ena sidan är

$$\begin{aligned} s &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{20}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \frac{4}{20} \\ &= 3.2 \end{aligned}$$

där olikheten stämmer för att vi inom varje parentes gjorde termerna mindre (genom att göra nämnarna större).

Å andra sidan är

$$\begin{aligned} s &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{20}\right) \\ &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{4}{8} + \frac{4}{12} + \frac{5}{16} \\ &= 3.5 + \frac{5}{16} \\ &< 4 \end{aligned}$$

där olikheten stämmer för att vi inom varje parentes gjorde termerna större (genom att göra nämnarna mindre). Alltså är heltalsdelen 3. $\square$

Lösningförslag 2. Betrakta integralen

$$\int_1^{21} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{21} = \ln(21)$$

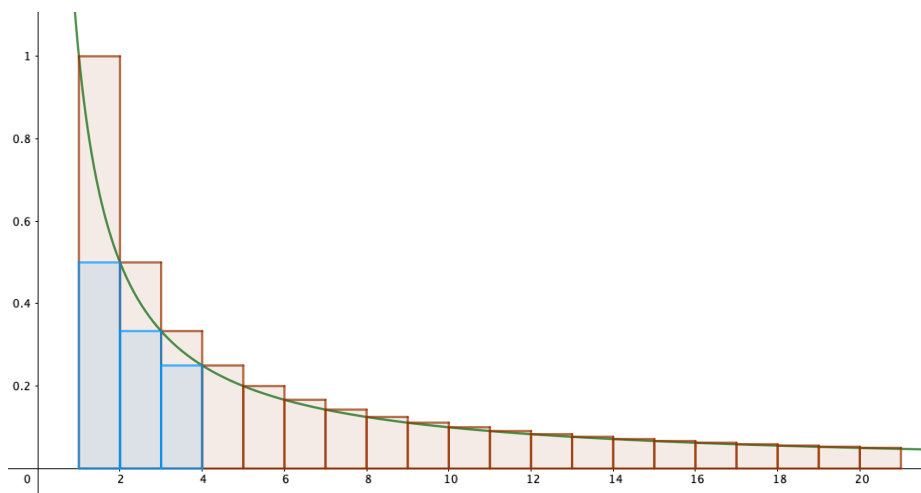
Det är arean under grafen till funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ mellan punkterna $x = 1$ och $x = 21$. Ett sätt att uppskatta den arean är att summera arean av rektanglarna i bilden nedan. Om vi summerar de röda rektanglarna så får vi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{20}$$

vilket är lite mer än arean under grafen. Om vi summerar de blåa rektanglarna (endast tre av dem är utritade, men mönstret fortsätter på samma sätt) så får vi

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{21}$$

vilket är lite mindre än arean under grafen.



Problem 6

Med andra ord har vi att

$$\ln(21) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{20} < \ln(21) + 1 - \frac{1}{21}$$

Det visar sig att detta ger

$$3.04 < 1 + \dots + \frac{1}{20} < 3.997$$

så heltalsdelen är 3. Detta är dock såklart mycket svårt att räkna ut utan en miniräknare! Ett bättre sätt att använda denna metod om man saknar miniräknare vore att räkna ut till exempel

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{6} = 1.95 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2.45$$

exakt, och sen använda integralen

$$\int_7^{21} \frac{1}{x} dx = \ln(21) - \ln(7) = \ln(3)$$

för att uppskatta summan av de resterande termerna. Vi får med samma metod som ovan att

$$\begin{aligned} 2.45 + \ln(3) &< 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{20} < 2.45 + \left(\ln(3) + \frac{1}{7} - \frac{1}{21} \right) \\ &= 2.45 + \ln(3) + \frac{2}{21} \\ &< 2.55 + \ln(3) \end{aligned}$$

Till sist noterar vi att $\ln(3) > 1$ eftersom $3 > e$ och att $\ln(27) < \log_{2.5}(27) < 4$ eftersom $2.5 < e$ och $2.5^4 > 6^2 > 27$. Det följer att $\frac{4}{3} > \ln(3) > 1$ vilket ger

$$3.45 < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{20} < 2.55 + \frac{4}{3} < 4$$

så heltalsdelen är 3, vilket skulle visas. □

Anmärkning. Det finns massor av kluriga sätt att räkna ut heltalsdelen av denna summa genom att göra olika uppskattningar som är betydligt mer effektiva än integralmetoden, för det här specifika problemet i alla fall. Vi har med integrallösningen ändå eftersom det är ett exempel på en mycket effektiv metod för att uppskatta många typer av summor även när antalet termer blir stort! Integralmetoden ger oss en bra uppfattning om vad summan $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ är även om n är mycket större än 20 - nämligen ungefär $\ln(n)$. Faktum är att vi här har visat att summan alltid är mellan $\ln(n+1)$ och $\ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$, vilket för stora n ger oss att summan är mellan $\ln(n+1)$ och $\ln(n+1) + 1$. Felet är alltså mindre än 1. Det visar sig att när n blir större och större så kommer avståndet från summan till $\ln(n)$ att närma sig en konstant som kallas för Euler-Mascheronikonstanten, och vars värde är ungefär 0.58.

Det kan också nämnas att man kan få en ännu bättre uppskattning av integralen genom att räkna areorna av parallelltrapetsen med hörn i punkterna

$$(n, 0), (n+1, 0) \quad \text{på } x\text{-axeln, samt} \quad (n, \frac{1}{n}), (n+1, \frac{1}{n+1}) \quad \text{på grafen}$$

Summan av deras areor från 1 till n är

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} \right) = \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

så vi får att

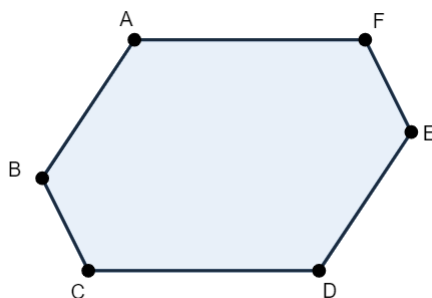
$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \approx \ln(n) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

men detta är fortfarande en liten överskattning av arean, så en underskattning av summan:

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} > \ln(n) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Eftersom Euler-Mascheronikonstanten är 0.58 så vet vi dock att det är en mycket liten underskattning (ungefär storlek 0.08 för stora n).

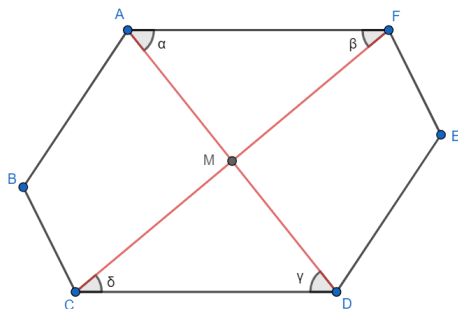
Problem 7. Givet är en konvex hexagon $ABCDEF$ där motsatta sidor är parallella. Visa att de tre diagonalerna AD , BE och CF skär varandra i en punkt om och endast om motsatta sidor är lika långa (alltså $AB = DE$, $BC = EF$ och $CD = FA$).



Problem 7

Lösningssförslag. Del 1: Lika långa sidor $\implies$ diagonaler sammanfaller.

Anta att motstående sidor är lika långa. Börja med att rita in AD och FC samt vinklarna α , β , γ och δ som i bilden. Eftersom AF och CD är parallella så måste $\alpha = \gamma$ och $\beta = \delta$ (alternativvinklar). Enligt vinkel-sida-vinkel innebär detta att triangelarna $\triangle AFM$ och $\triangle CDM$ är kongruenta. FC delar alltså upp AD i två lika långa delar AM och MD . Av samma anledningar delar också BE upp AD i två lika långa delar. BE och FC korsar alltså AD i samma punkt.



Del 2: Diagonaler sammanfaller $\implies$ Lika långa sidor.

Anta att AD , BE och CF skär varandra i en punkt M . Precis som innan får vi att $\angle FAM = \angle CDM$ och $\angle AFM = \angle DCM$, vilket innebär att $\triangle AFM \sim \triangle DCM$ och därmed $\frac{AM}{DM} = \frac{FM}{CM}$.

På liknande sätt kan vi visa att $\frac{FM}{CM} = \frac{EM}{BM}$ och $\frac{EM}{BM} = \frac{DM}{AM}$. Sätter vi ihop dessa likheter får vi

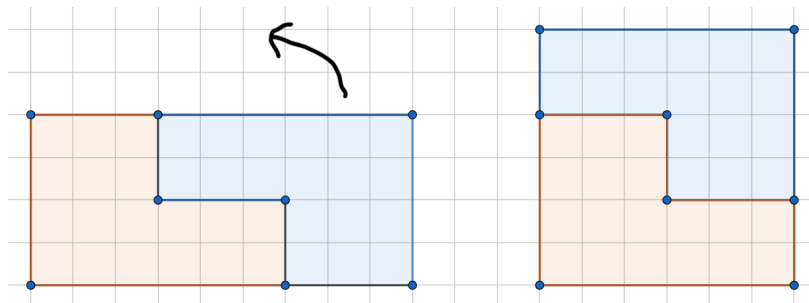
$$\frac{AM}{DM} = \frac{FM}{CM} = \frac{EM}{BM} = \frac{DM}{AM}$$

vilket endast kan stämma om $AM = DM$. Triangelarna $\triangle AFM$ och $\triangle DCM$ är alltså kongruenta, därmed $AF = CD$. Av motsvarande anledningar är $BA = DE$ och $CB = EF$, vilket skulle visas. $\square$

Problem 8.

- Tilda har en rektangulär bräda som är 1 meter bred och 2,25 meter lång. Visa att hon kan såga isär den i två delar som kan sättas ihop till en kvadrat.
- Visa att det finns oändligt många tal x sådana att en $1\text{ m} \times x\text{ m}$ bräda kan sågas isär i två delar och sättas ihop till en kvadrat.

Lösningsförslag. Del (a): Observera att $2.25 = 9/4$. Brädan kan alltså delas upp i ett 9×4 rutnät av kvadrater. Den kan sedan byggas om till en kvadrat enligt figuren nedan:



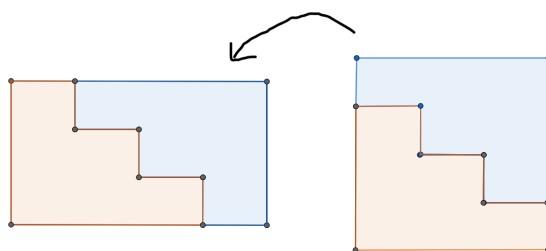
Problem 8.a - lösning

Del (b): Från en kvadrat kan man skapa en rektangel med följande metod:

- Dela upp kvadraten i ett $n \times (n+1)$ rutnät.
- Rita en trappa längs rutnätet som delar upp kvadraten i två lika stora delar.
- Flytta ner den översta delen ett trappsteg.

Den resulterande rektangeln består då av ett $n \times (n+1)$ rutnät av $n \times (n+1)$ rutor. Dessa förhållandet mellan dess sidor blir därmed $(n+1)^2 : n^2$. Om vi sätter $x = \frac{(n+1)^2}{n^2}$ för något heltal n så kan vi utföra samma process baklänges och på så vis transformera en $1 \times x$ rektangel till en $\frac{n+1}{n} \times \frac{n+1}{n}$ kvadrat. Vi får alltså följande följd av möjliga värden på x :

$$\frac{4}{1}, \frac{9}{4}, \frac{16}{9}, \frac{25}{16}, \frac{36}{25}, \dots, \frac{(n+1)^2}{n^2}, \dots$$



Problem 8.b - processen med $n = 3$

□

Problem 9. Ruth är en rätblockssamlare som bara samlar på rätblock med volym n och vars alla kanter har heltalslängder. En dag tog hon fram alla sina rätblock, och la dem på en lång rad. Hon la då märke till ett lustigt sammanträffande: när hon kollade på rätblocken uppifrån såg de alla ut som rektanglar och inga av dem var kongruenta med varandra! Dessutom var ingen av dem en kvadrat. Visa att Ruth omöjligen kan ha fler än n rätblock.

Lösningssförslag 1. För att rätblocken ska ha volym n så måste toppsidan av varje rätblock ha en area som delar n . Problemet kan alltså omformuleras till: "Visa att det inte finns fler än n talpar (a, b) sådana att $a < b$ och $ab \mid n$ ".

Låt antalet delare till n vara D . Det finns exakt $\frac{D(D-1)}{2}$ stycken par av delare (a, b) sådana att $a < b$. Betrakta nu för två delare $a < b$ de två paren

$$(a, b) \quad \text{samnt} \quad \left(\frac{n}{b}, \frac{n}{a}\right)$$

Om $ab \mid n$ så måste $ab \leq n$, vilket ger att

$$\frac{n}{b} \cdot \frac{n}{a} = \frac{n^2}{ab} \geq n$$

Alltså har vi antingen att

- Max ett av paren har en produkt som delar n ; eller
- $ab = n$.

Det finns exakt $\lfloor \frac{D}{2} \rfloor$ stycken par av delare $a < b$ sådana att $ab = n$, så vi får som mest

$$\frac{1}{2} \frac{D(D-1)}{2} + \frac{D}{4} = \frac{D^2}{4}$$

stycken fungerande par. Slutligen använder vi att $D \leq 2\sqrt{n}$ vilket exakt ger olikheten vi vill ha. $\square$

Lösningssförslag 2. Denna lösning inkom från en av deltagarna i tävlingen!

Som tidigare noterar vi att problemet är ekvivalent med att visa att det finns som mest n stycken par av tal $a < b$ sådana att $ab \mid n$. Låt $d(m)$ vara antalet delare till m . För varje val av a finns det $d(n/a)$ val av b som ger att $ab \mid n$. Totalt finns alltså $\sum_{m \mid n} d\left(\frac{n}{m}\right)$ stycken par av tal (a, b) sådana att $ab \mid n$, och av dessa gäller för max hälften att $a < b$. Det räcker alltså att visa att

$$\frac{1}{2} \sum_{m \mid n} d\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{2} \sum_{m \mid n} d(m) \stackrel{(?)}{\leq} n = \sum_{m \mid n} \varphi(m)$$

där den sista likheten är en (ganska) välkänd identitet för Euler's fi-funktion ϕ . Vi är alltså klara om vi kan visa att $d(m) \leq 2\varphi(m)$ för alla $m \in \mathbb{N}$. Notera att

- $d(2^\alpha) = \alpha + 1 \leq 2^\alpha = 2\varphi(2^\alpha)$ där olikheten följer från induktion med basfall $\alpha = 1$
- $d(p^\alpha) = \alpha + 1 \leq 2 \cdot 3^{\alpha-1} \leq (p-1) \cdot p^{\alpha-1} = \varphi(p^\alpha)$ för primtal $p > 3$, där första olikheten följer från induktion med basfall $\alpha = 1$

Eftersom både d och φ är multiplikativa funktioner så ger detta att

$$d(2^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}) = d(2^{\alpha_1})d(p_2^{\alpha_2})\dots d(p_k^{\alpha_k}) \leq 2\varphi(2^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2})\dots\varphi(p_k^{\alpha_k}) = 2\varphi(2^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k})$$

vilket är exakt vad vi ville visa. $\square$

Problem 10. Kevin har en p -sidig tärning för varje primtal p mindre än 42. Visa att han kan simulera en 42-sidig tärning (dvs välja ett heltal mellan 1 och 42 så att sannolikheten är samma för alla) med endast:

- (a) Tre tärningskast.
- (b) Två tärningskast.

Lösningförslag. Slå först en 41-sidig tärning och låt a vara talet du får.

- Om $a \leq 6$, slå en 7-sidig tärning och kalla svaret b . Sätt $x = 7(a - 1) + b$.
- Om $7 \leq a \leq 21$, slå en 3-sidig tärning och kalla svaret b . Sätt $x = 3(a - 7) + b$.
- Om $a \geq 22$, slå en 2-sidig tärning och kalla svaret b . Sätt $x = 2(a - 22) + b$.

I var och en av de tre fallen blir sannolikheten för varje tal mellan 1 och 42 lika. Detta simulerar alltså en 42-sidig tärning.

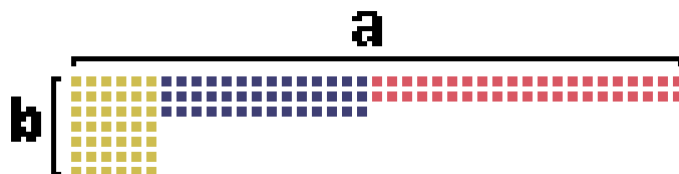


Illustration av lösningen till problem 10.

□

Problem 11. Ivar och Ravi bor i ett stort spökhushus som består av n stycken rum. Varje rum har ett antal dörrar som leder till andra rum. Totalt finns det $n - 1$ dörrar, och det är möjligt att gå från vilket rum som helst till vilket annat rum som helst genom en serie dörrar.

En dag bestämmer sig husets spöken för att göra alla dörrar enkelriktade! Varje dörr färgas röd på ena sidan och indigo på andra sidan, och för att se till att Ivar och Ravi inte kan hålla ihop ser spökerna till att Ivar bara kan gå genom indigo-färgade dörrar medan Ravi bara kan gå genom röda dörrar.

Eftersom spökerna inte vill vara allt för elaka, så gav dem Ivar och Ravi möjligheten att vända på dörrar så att färgerna byter plats, men bara enligt vissa regler. Man får bara vända på en dörr om man är i ett rum som man inte kan lämna för att alla dörrar har fel färg, och man måste i så fall vända på *alla* dörrar i det rummet på en gång! Visa att, oavsett hur spökerna färgade dörrarna och oavsett vilka rum Ivar och Ravi är i från början, så kan Ivar och Ravi gå runt i huset och vända på dörrarna så att vilken färg-konfiguration som helst uppnås.

Lösningsförslag. Vi gör induktion på antalet rum. I basfallet finns ett rum och inga dörrar, och då är resultatet uppenbart. Anta nu att påståendet är sant när spökhuset innehåller k rum. Vi ska visa att det så också måste vara sant när spökhuset innehåller $k + 1$ rum. Betrakta därmed ett spökhushus G med $k + 1$ rum. Om alla rum hade två eller fler dörrar så hade det funnits åtminstone $k + 1$ dörrar totalt. Men det finns bara k dörrar. Alltså måste det finnas åtminstone ett rum som har exakt en dörr. Välj ett godtyckligt sådant rum och kalla det för a .

Lemma 1. *Om Ivar och Ravi är utanför a så kan de vända på alla dörrar utom dörren till a hur de vill, och de kan göra detta så att dörren till a är vänd likadant när de är klara som när de började.*

bevis. Ifall a och dörren till a inte fanns så hade huset haft k rum och $k - 1$ dörrar. Enligt induktionshypotesen finns det alltså en sekvens drag som låter Ivar och Ravi vända på alla dörrar åt rätt håll. Om Ivar och Ravi utför dessa drag i huset med $k + 1$ dörrar kan dock någon råka vända på dörren till a . Dessutom, om någon vill vända på alla dörrarna från b så kan dörren till a förhindra dem från att göra detta. Dessa problem kan dock lösas med följande justeringar av strategin:

1. Varje gång någon skulle ha vänt dörrarna i b men stoppas på grund av dörren till a , låt dem istället gå in i a , fastna, vända på dörren, och gå tillbaka till b . Därefter kommer personen kunna vända på dörrarna till i b . Dörren till a vänds på detta sätt två gånger så den är vänd likadant efter processen.
2. Varje gång någon vänder på dörrarna i b , men på så sätt råkar vända på dörren till a , låt de därefter gå in i a , fastna, vända på dörren och gå tillbaka till b . Återigen vänds dörren två gånger, vilket innebär att den är vänd åt samma håll som den var ursprungligen.

Detta bevisar lemmat. □

Nu kan vi beskriva Ivar och Ravis strategi: Om Ivar eller Ravi är innuti a så går de ut (vilket kan innebära att de behöver vända på dörren dit). När varken Ivar eller Ravi är i a så kollar de om dörren till a är vänd rätt håll. Om den är det använder de Lemma 1 för att bli klara. Om den inte är det så måste antingen Ivar eller Ravi ta sig dit och vända på dörren. Vi kan anta utan inskränkning på problemet att dörren in i a är röd och att det därför är Ravi som måste gå in i rum a och vända på dörren. För att ta sig till rummet kan de använda Lemma 1 och vända på alla dörrar så att Ravi kan ta sig till a från vilket rum som helst (Detta är alltid möjligt eftersom det huset är sammanhängande. Vänd varje dörr så att dess indigosida pekar mot rummet närmast a). Ravi kan sedan gå till a , vända på dörren och gå ut. Slutligen använder de Lemma 1 igen för att vända resten av dörrarna hur de vill. Då är de klara, och enligt induktionsprincipen lyckas de oavsett storleken på spökhuset. □