

HÖJDPUNKTEN 2025

Lösningförslag - Öppen tävling



Problem 1. En rektangel är indelad i n mindre rektanglar som alla ska målas i olika färger. Dessförinnan måste målartejp sättas längs kanterna runt alla rektanglar. Vad är det minsta antalet tejpbitar som behövs om inga tejpbitar får överlappa?



Lösningförslag. Vi hävdar att det minsta antalet tejpbitar som behövs är $n + 3$.

Betrakta ett sätt att tejpa rektanglarnas alla kanter som använder så få tejpbitar som möjligt. Då kommer varje ände av en tejpbit att ligga vid en trevägskorsning, en fyrvägskorsning eller vid ett av den stora rektangelns fyra hörn.

Vid varje tre- och fyrvägskorsning förekommer då alltid dubbelt så många rektangelhörn som tejpbitsändar. Och vid den stora rektangelns fyra hörn förekommer alltid exakt två tejpbitsändar.

Eftersom det finns exakt $4n$ rektangelhörn, och varje tejpbit har två ändar, så kommer ett arrangemang som använder så få tejpbitar som möjligt alltid att använda exakt

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(4n - 4) + 2(4) \right) = n + 3$$

tejpbitar, vilket var vad vi ville visa.

Problem 2. Låt n och k vara positiva heltal med $n \geq \max\{k, 3\}$. Alice och Bengt spelar ett spel på en (oriiktad och enkel) graf G . I början av spelet är G en komplett graf på n noder. Varje runda väljer Alice först ut k kanter från G , och sedan tar Bengt bort en av de kanterna som Alice valt ut.

Spelet tar slut när G bara har $n - 1$ kanter kvar. Då vinner Alice om G är sammanhängande och annars vinner Bengt. Vad är det största positiva heltalet k , i termer av n , så att Alice vinner om båda spelarna spelar optimalt?

Lösningsförslag. Vi hävdar att det största positiva heltalet k för vilket Alice vinner alltid är $k = 3$, om båda spelarna spelar optimalt.

Lemma 1. Alice vinner om $k \leq 3$.

Bevis av Lemma 1. Det är välkänt att en (oriiktad och enkel) graf på n noder med fler än $n - 1$ kanter kommer att innehålla åtminstone en cykel.

På sin tur kan Alice därför alltid välja $k \leq 3$ kanter från samma cykel, c , i G . När Bengt sedan tar bort en av dessa kanter, e , så kommer den resulterande grafen att fortsatt vara sammanhängande. Detta gäller eftersom om två noder hade en väg mellan sig innan e togs bort så kommer antingen (1) samma väg kunna förbinda dem efter att e tas bort, eller (2) om e var en del av vägen så kan e ersättas med de resterande kanterna i c och på så vis bilda en ny väg som förbinder noderna.

Därmed kan Alice garantera sin egen vinst när $k \leq 3$. $\square$

Lemma 2. Bengt vinner om $k > 3$.

Bevis av Lemma 2. Vid spelets början så väljer Bengt en triangel T i G . Detta är möjligt eftersom G är en komplett graf på n noder vid spelets början.

På sin tur kan Bengt alltid bevara T genom att ta bort från G en av de åtminstone $k - 3 \geq 1$ många kanterna som inte är en del av T .

När den endast finns $n - 1$ kanter kvar i grafen kommer då triangeln T fortfarande att vara intakt. Men en graf på n noder och $n - 1$ kanter inte vara sammanhängande om den innehåller en cykel, i detta fallet T .

Därmed kan Bengt garantera sin egen vinst när $k > 3$. $\square$

Då kommer Bengt att vinna om $k > 3$, och Alice kommer att vinna om $k \leq 3$. Därför är $k = 3$ det största möjliga k :et för vilket Alice vinner.

Problem 3. En groda befinner sig i punkten $(0, 0)$ i planet och börjar hoppa. Grodan gör först ett hopp av längd 1 och hoppar sedan dubbelt så långt för varje hopp. Alla hopp görs parallellt med någon av axlarna. Vilka punkter kan grodan nå genom att hoppa på detta sätt?

Lösningsförslag. Notera att grodan endast kan nå punkter med heltalskoordinater (x, y) så att $x + y$ är udda. Vi hävdar att grodan kan nå alla dessa punkter.

Lemma 1. Låt $n \in \mathbb{N}$. Grodan kan hoppa till alla punkter (x, y) med heltalskoordinater där $x + y$ är udda och $|x| + |y| \leq 2^n - 1$ på exakt n hopp.

Bevis av Lemma 1. Vi kommer att bevisa lemmat genom induktion på n .

Basfall ($n = 1$): På sitt första hopp kan grodan hoppa till $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ eller $(0, -1)$, vilket omfattar alla punkter (x, y) med heltalskoordinater så att $x + y$ är udda och $|x| + |y| \leq 2^1 - 1$.

Induktionssteg ($n > 1$): Notera att grodan kan hoppa till alla punkter (x', y') med heltalskoordinater så att $x' + y'$ är udda och $|x'| + |y'| \leq 2^{n-1} - 1$ på exakt $n - 1$ hopp. Betrakta en punkt (x, y) med heltalskoordinater så att $x + y$ är udda och $|x| + |y| \leq 2^n - 1$. Då ser vi att

- om $x > 0$ och $|x| < |y|$ så kan grodan hoppa till $(x - 2^{n-1}, y)$ på $n - 1$ hopp, eftersom $|x - 2^{n-1}| + |y| = 2^{n-1} - x + |y| \leq 2^{n-1} - 1$, och sen vidare till (x, y) på det n :te hoppet,
- om $y > 0$ och $|y| < |x|$ så kan grodan hoppa till $(x, y - 2^{n-1})$ på $n - 1$ hopp, eftersom $|x| + |y - 2^{n-1}| = 2^{n-1} - y + |x| \leq 2^{n-1} - 1$, och sen vidare till (x, y) på det n :te hoppet,
- om $x < 0$ och $|x| < |y|$ så kan grodan hoppa till $(x + 2^{n-1}, y)$ på $n - 1$ hopp, eftersom $|x + 2^{n-1}| + |y| = 2^{n-1} + x + |y| \leq 2^{n-1} - 1$, och sen vidare till (x, y) på det n :te hoppet, och
- om $y < 0$ och $|y| < |x|$ så kan grodan hoppa till $(x, y + 2^{n-1})$ på $n - 1$ hopp, eftersom $|x| + |y + 2^{n-1}| = 2^{n-1} + y + |x| \leq 2^{n-1} - 1$, och sen vidare till (x, y) på det n :te hoppet.

Då har vi visat att grodan kan hoppa till alla punkter (x, y) med heltalskoordinater så att $x + y$ är udda och $|x| + |y| \leq 2^n - 1$ på exakt n hopp, vilket implicerar induktionssteget.

På grund av induktion har vi därför att grodan kan hoppa till alla punkter (x, y) med heltalskoordinater så att $x + y$ är udda. $\square$

Därför är mängden punkter som grodan kan hoppa till exakt de punkterna (x, y) med heltalskoordinater så att $x + y$ är udda.

Problem 4. En pinne av längd 1 delas upp mellan ett uppräknligt antal personer $P_1, P_2, \dots$. Först väljer P_1 ett tal U_1 likformigt slumpmässigt från intervallet $[0, 1]$ och pinnen delas i en bit av längd U_1 och en av längd $1 - U_1$. Biten av längd U_1 sparar P_1 och den andra biten ges till P_2 . Denne väljer ett tal U_2 likformigt slumpmässigt från intervallet $[0, 1]$ och bryter pinnen i två bitar av längd $U_2(1 - U_1)$ och $(1 - U_2)(1 - U_1)$. Den första biten behåller P_2 och den andra biten ges vidare till P_3 , och processen fortsätter så att personen P_n får en bit av längd $U_n(1 - U_{n-1}) \dots (1 - U_1)$. Vad är sannolikheten att biten som varje person får behålla är kortare än $1/2$?

Lösningförslag. Svaret är $1 - \ln 2$.

Definiera funktionen $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ så att $f(x)$ är den sökta sannolikheten för det motsvarande problemet där istället pinnen har längd x . Om $x < \frac{1}{2}$ kan ingen av bitarna vara längre än $\frac{1}{2}$ och om $x > \frac{1}{2}$ kan vi använda lagen om total sannolikhet för U_1 . Vi får på så sätt

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1/2 \\ \frac{1}{x} \int_{x-1/2}^x f(y) dy, & x \geq 1/2 \end{cases}.$$

För $x \geq 1/2$ fås efter multiplikation med x och derivering att

$$f(x) + xf'(x) = f(x) - f(x - 1/2) \implies xf'(x) = -1$$

så att $f(x) = c - \ln x$ för $x \geq 1/2$. Konstanten c bestäms av $1 = f(1/2) = c + \ln 2$ så $f(x) = 1 - \ln 2 - \ln x$. Det sökta värdet är $f(1) = 1 - \ln 2$.

Anmärkning: Funktionen $f(x)$ ovan är en omskalad version av den så kallade "Dickmann funktionen" $\rho(x) = f(2x)$ som dyker upp i ett flertal situationer. Till exempel om n väljs uniformt mellan 1 och N för något stort heltal N så uppskattar $\rho(x)$ sannolikheten att $p_{\max}(n) < n^{1/x}$, där $p_{\max}(n)$ betecknar den största primtalsfaktorn av n . För $1 < x < 2$ gäller formeln $\rho(x) = 1 - \ln(x)$, men för $x > 2$ saknar ϕ en sluten formel.

Problem 5. Astronauten Lisa bygger upp mänsklighetens första grönsaksplantage på Mars. Hon bygger det utav ett rutnät av hexagonala odlingsmoduler vars alla sidlängder är 1m långa. Mitt ovanför den mittersta odlingsmodulen placerar hon en ljusspridare som lyser upp alla moduler inom en cirkel med radie 100m. För att en odlingsmodul ska fungera måste den vara helt upplyst. Givet att Lisa har fyllt ljuscirkeln med så många odlingsmoduler som möjligt, bestäm odlingens omkrets.

Lösningsförslag. Låt ljusspridarens position vara origo och låt u , v och w vara tre vektorer som går från origo till tre parvis ej-intilliggande hörn av den mittersta hexagonen. Man ser då att hexagonerna i rutnätet ligger med centrum i varje punkt som kan uttryckas på formen $au + bv + cw$ sådana att $3 \mid a + b + c$. I synnerhet finns det hexagoner i de sex punkterna $\pm 99u, \pm 99v, \pm 99w$ och dessa hexagoner tangerar ljuscirkeln i punkterna $\pm 100u, \pm 100v$ och $\pm 100w$ som per symmetri delar upp omkretsen i sex kongruenta "stigar". Alla dessa är lika långa, så för att beräkna hela omkretsen behöver vi bara beräkna en av stigarnas längd och multiplicera det med 6.

Betrakta stigen från $A := 100u$ till $B := -100v$ vars totala förflyttning är $100w$. Den kommer bestå av en följd steg av enhetslängd, var och ett i någon av de sex riktningarna $\pm u, \pm v, \pm w$. Om man ritar upp det ser man dock att de enda stegen som kan förekomma är de som tar en närmare B , det vill säga w -steg, $(-u)$ -steg och $(-v)$ -steg. Ytterligare måste varje w -steg antingen följas av ett $(-u)$ -steg eller ett $(-v)$ -steg och på samma sätt måste varje $(-u)$ -steg och $(-v)$ -steg följas av ett w -steg. Alltså är vartannat steg ett w -steg och varannat steg är ett $-u$ -steg eller ett $-v$ -steg. Varje $(-u)$ -steg och $(-v)$ -steg motsvarar ett halvt steg i w -led, så för att stigen ska motsvara totalt 100 steg i w -led får vi att den måste bestå av 67 w -steg och 66 $(-u)$ eller $(-v)$ -steg. Totala antalet steg runt hela odlingen blir $6 \cdot (66 + 67) = 798$.

Svar: 798 m

Problem 6. Låt ABC vara en olikbent triangel med incentrum I och omskriven cirkeln Ω . Låt M vara mittpunkten av cirkelbågen på Ω mellan B och C som innehåller A . Låt D vara skärningen mellan linjerna BC och AM . Låt J vara den andra skärningen mellan linjen DI och den omskrivna cirkeln av triangeln BIC . Bevisa att tangenten vid J till den omskrivna cirkeln av triangeln BIC delar sträckan DM i två lika stora delar.

Lösningsförslag. Denna lösning använder riktade vinklar.

Låt I_A vara A -excentrum i triangeln ABC och låt ω beteckna den omskrivna cirkeln av triangeln BIC . Låt L vara mittpunkten på sträckan DM . Vi kommer bevisa att linjen LJ tangerar ω .

Det är välkänt att I_A ligger på linjen AI och att I_AI är en diameter av cirkeln ω .

Från kordasatsen i punkten D har vi att

$$DA \cdot DM \stackrel{\Omega}{=} DB \cdot DC \stackrel{\omega}{=} DI \cdot DJ$$

så M , A , I och J ligger på en cirkel, som vi betecknar Γ .

Då har vi att

$$\angle MJI \stackrel{\Gamma}{=} \angle MAI = 90^\circ \stackrel{\omega}{=} \angle I_AJI$$

så M , J och I_A ligger på en linje, som vi betecknar ℓ .

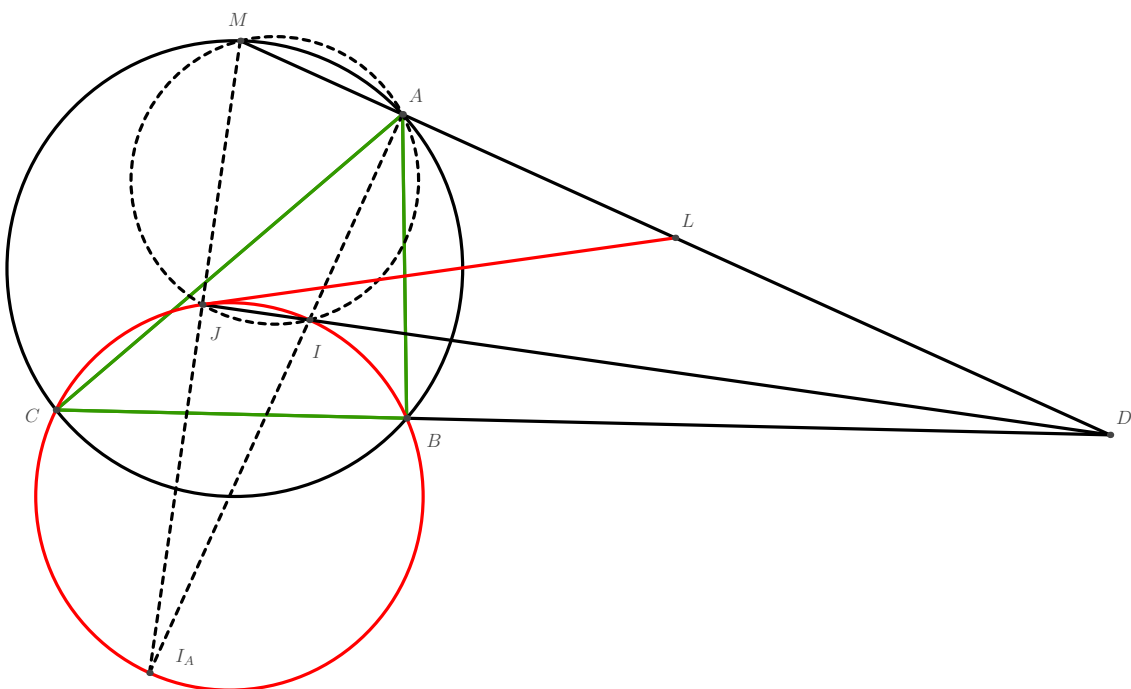
Vi har också att

$$\angle MJD = \angle MJI = 90^\circ$$

så L är centrum för den omskrivna cirkeln av triangeln DML . Därmed har vi också att $\angle MJL = \angle LMJ$, vilket ger att

$$\angle I_AJL \stackrel{\ell}{=} \angle MJL = \angle LMJ = \angle AMJ \stackrel{\Gamma}{=} \angle AIJ = \angle I_AIJ$$

så linjen LJ tangerar ω på grund av korda-tangentsatsen, vilket var vad vi ville visa.



Problem 7. Låt n vara ett positivt heltal. Oskar får en påse med n olika positiva heltal och skriver upp alla möjliga tal på formen $xy + z$ på en tavla, där x, y och z är (inte nödvändigtvis olika) tal från påsen. Givet n , bestäm det minsta antal *olika* tal som Oskar kan ha skrivit upp på tavlan.

Lösningsförslag. För en mängd S av n positiva heltal, låt

$$T(S) = \{xy + z \mid x, y, z \in S\}.$$

Vi hävdar att den minsta möjliga storleken på $T(S)$ är $n^2 + n - 1$.

Lemma 1. Om $S = \{1, \dots, n\}$ så är $|T(S)| = n^2 + n - 1$.

Bevis av Lemma 1. Om $S = \{1, \dots, n\}$ så är det uppenbart att $T(S) = \{2, \dots, n^2 + n\}$. Då har vi att $|T(S)| = n^2 + n - 1$, vilket var vad vi ville visa. $\square$

Lemma 2. För alla mängder S av n positiva heltal gäller att $|T(S)| \geq n^2 + n - 1$.

Bevis av Lemma 2. Låt e vara det minsta elementet i S och låt E vara det största elementet i S .

Vi hävdar att alla tal på formerna

(i) $xE + z$, där $x, z \in S$, och

(ii) $e^2 + z$, där $z \in S \setminus \{E\}$

är parvis distinkta. Att detta är sant kan vi se genom följande falluppdelning:

- Om $x_1E + z_1 = x_2E + z_2$ så får vi att $z_1 = z_2$ genom att betrakta ekvationen modulo E . Därefter får vi direkt att $(x_1, z_1) = (x_2, z_2)$.
- Om $e^2 + z_1 = e^2 + z_2$ så måste $z_1 = z_2$.
- Notera att $e^2 + z_1 < e^2 + E \leq eE + e \leq xE + z_2$ för alla $x, z_2 \in S, z_1 \in S \setminus \{E\}$.

Eftersom det finns n^2 tal på formen (i) och $n - 1$ tal på formen (ii) i $T(S)$ så följer det att $|T(S)| \geq n^2 + n - 1$ för alla mängder S av n positiva heltal. $\square$

Därmed är det minsta antalet olika tal som Oskar kan ha skrivit upp på tavlan lika med $n^2 + n - 1$.

Problem 8. Bestäm alla funktioner $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ som uppfyller att

$$d\left(\sum_{k=1}^N a_k\right) \leq d\left(\sum_{k=1}^N f(a_k)\right)$$

för alla $N, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{N}$. (Här betecknar $d(n)$ antalet delare av n .)

Lösningförslag. Vi hävdar att funktionerna $f(n) = cn$, där c är ett godtyckligt positivt heltal, utgör alla lösningar till funktionalekvationen. Det är uppenbart att alla dessa funktioner uppfyller funktionalekvationen.

Lemma 1. Om x och y är positiva heltal så att

$$d(Nx) \leq d(Ny)$$

för alla $N \in \mathbb{N}$, så måste $x \mid y$.

Bevis av Lemma 1. Låt x och y vara positiva heltal med $x \nmid y$. Vi kommer visa att det existerar något $N \in \mathbb{N}$ för vilket $d(Nx) > d(Ny)$.

Eftersom $x \nmid y$ existerar det ett primtal p för vilket $\nu_p(x) > \nu_p(y)$.

Betrakta $N = y^E p^{-E\nu_p(y)}$ för något positivt heltal E . Då har vi att

$$\frac{d(Nx)}{d(Ny)} \geq \frac{\nu_p(x) + 1}{\nu_p(y) + 1} \prod_{\substack{q \mid y \\ q \neq p}} \frac{(E\nu_q(y) + \nu_q(x) + 1)}{((E + 1)\nu_q(y) + 1)}.$$

Eftersom högerledet tenderar till $\frac{\nu_p(x)+1}{\nu_p(y)+1} > 1$ när E går mot ∞ så existerar det något E för vilket högerledet är större än 1. Därmed får vi att

$$\frac{d(Nx)}{d(Ny)} > 1$$

vilket var vad vi ville visa. □

Genom att använda Lemma 1 på den givna funktionalekvationen får vi att

$$\sum_{k=1}^N a_k \mid \sum_{k=1}^N f(a_k)$$

för alla $N, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{N}$.

Därför måste $n \mid f(n)$ för varje $n \in \mathbb{N}$. Låt $g(n) = \frac{f(n)}{n}$. För alla $A, n \in \mathbb{N}$ har vi då att

$$An + 1 \mid Af(n) + f(1)$$

$$An + 1 \mid An \cdot g(n) + g(1)$$

$$An + 1 \mid -g(n) + g(1)$$

så $g(1) - g(n)$ har oändligt många delare och måste därför vara lika med 0.

Vi får då att alla lösningar till funktionalekvationen uppfyller att $f(n) = cn$ för alla $n \in \mathbb{N}$, för något $c \in \mathbb{N}$, vilket var vad vi ville visa.

Problem 9. Låt $a_1, a_2, a_3, \dots$, vara en oändlig följd av distinkta positiva heltal och låt N vara ett positivt heltal. Det visar sig att för varje heltal $n > N$ så är a_n lika med det minsta positiva heltalet som inte kan skrivas som en summa av olika element i mängden $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$.

Bevisa att det existerar ett positivt heltal M så att $a_m = 2a_{m-1}$ för alla $m > M$.

Lösningsförslag 1. Let $S_m = a_1 + \dots + a_m$ and let $x_m = S_m + 1 - a_{m+1}$. Note that

- $x_m \geq 0$ since we definitely can't express $S_m + 1$ as a sum of the numbers from $\{a_1, \dots, a_m\}$, and so $a_{m+1} \leq S_m + 1$
- $x_m - x_{m+1} = a_{m+2} - 2a_{m+1} \geq 0$, since you can write any number from 0 to $a_{m+1} - 1$ using only the numbers $a_1, \dots, a_m$ and so you can write any number between a_{m+1} and $2a_{m+1} - 1$ by adding a_{m+1} , implying that a_{m+2} is at least $2a_{m+1}$

But the two observations above show that x_m is a non-increasing sequence of positive numbers, and hence it's eventually constant. And when it's constant, we must have $a_{m+2} = 2a_{m+1}$.

Lösningsförslag 2. Låt A_n beteckna mängden $\{a_1, \dots, a_n\}$ och låt $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ för varje $n \in \mathbb{N}$. Låt vidare χ_n beteckna mängden av positiva heltal mindre än eller lika med S_n som inte kan skrivas som en summa av element i mängden A_n .

Notera att det för varje $n \geq N$ gäller att

$$a_{n+1} = \begin{cases} S_n + 1 & \text{om } \chi_n = \emptyset \\ \min(\chi_n) & \text{annars} \end{cases}.$$

Notera att följderna (a_n) är obegränsad. Därför kan vi välja ett positivt heltal M så att $M > N$ och $a_M > S_N$.

Lemma 1. För varje $n > N$ gäller att $a_{n+1} \geq 2a_n$.

Bevis av Lemma 1. Att a_n är lika med det minsta positiva heltalet som inte kan skrivas som en summa av element i mängden A_{n-1} innebär att alla positiva heltal i mängden $\{1, \dots, a_n - 1\}$ kan skrivas som en summa av element i mängden A_{n-1} . Då kan alla positiva heltal i mängden

$$\{1, \dots, a_n - 1\} \cup \{a_n\} \cup \{a_n + 1, \dots, a_n + (a_n - 1)\}$$

skrivas som en summa av element i mängden A_n .

Därför måste $a_{n+1} > a_n + (a_n - 1) \implies a_{n+1} \geq 2a_n$ för varje $n > N$. □

Lemma 2. För alla positiva heltal b och n gäller att $b \in \chi_n \iff S_n - b \in \chi_n$.

Bevis av Lemma 2. Det räcker med att visa att $b \notin \chi_n \implies S_n - b \notin \chi_n$ för alla $b < S_n$.

Om $b \notin \chi_n$ så är b lika med summan av elementen i en delmängd B av A_n . Notera då att $S_n - b$ är lika med summan av elementen i delmängden $A_n \setminus B$ av A_n , och därmed är $S_n - b \notin \chi_n$. □

Lemma 3. För varje $m \geq M$ gäller att $\chi_m = \emptyset$ och $a_{m+1} = 2a_m$.

Bevis av Lemma 3. Från Lemma 1 följer att

$$S_m = S_N + (a_{N+1} + \dots + a_m) < a_M + \left(\frac{a_{m+1}}{2^{m-N}} + \dots + \frac{a_{m+1}}{2^1} \right) < 2a_{m+1}.$$

Antag att $\chi_m \neq \emptyset$. Då har vi att $a_{m+1} = \min(\chi_m)$. Från Lemma 2 har vi då att $S_m - a_{m+1} \in \chi_m$. Tillsammans med olikheten ovan får vi då att

$$a_{m+1} = \min(\chi_m) \leq S_m - a_{m+1} < a_{m+1}$$

vilket är en motsägelse.

Därför måste vi ha $\chi_m = \emptyset$ för varje $m \geq M$. Då får vi att

$$a_{m+1} = S_m + 1 = (S_{m-1} + a_m) + 1 = 2a_m$$

vilket var vad vi ville visa. □

Från Lemma 3 får vi att $a_m = 2a_{m-1}$ för alla $m > M$.

Problem 10. Låt P vara ett icke-konstant heltalspolynom med positiv ledande koefficient. För varje positivt heltal n , visa att det finns ett heltal c sådant att $P(x) + c$ är ett primtal för minst n olika heltal x .

Lösningförslag. Vi kan byta ut $P(x)$ mot $P(x - a) + b$ för vilka heltal a och b som helst och visa problemet för det polynomet istället. Därmed kan vi utan inskränkning anta att $P(1) = 0$ och att $P(x)$ är strikt ökande för $x > 0$.

Betrakta funktionen

$$\tilde{Q}(m) = \max_{1 \leq i \leq m} (P(i+1) - P(i))$$

där $m \in \mathbb{N}$.

Notera att $\tilde{Q}(m) > 0$ eftersom $P(x)$ är strikt ökande för $x > 0$. Notera även att för tillräckligt stora $m \in \mathbb{N}$ så kommer $\tilde{Q}(m) = P(m+1) - P(m)$.

För varje $m \in \mathbb{N}$, betrakta mängderna

$$S_m = \{P+1, \dots, P+\tilde{Q}(m)\}$$

och

$$L_m = \{p(k) \mid k \in \mathbb{N}, p \in S_m\}.$$

Eftersom $P(k+1) - P(k) \leq \tilde{Q}(m)$ för varje heltal $1 \leq k \leq m$ så kommer varje heltal mellan $1 = P(1) + 1$ och $P(m+1) + \tilde{Q}(m)$ att förekomma i L_m .

Betrakta vad som händer när $m \in \mathbb{N}$ går mot ∞ . Från primtalssatsen får vi att det kommer att finnas $\Theta\left(\frac{P(m+1)+\tilde{Q}(m)}{\log(P(m+1)+\tilde{Q}(m))}\right) = \Theta\left(\frac{m^d}{\log(m)}\right)$ primtal mellan 1 och $P(m+1) + \tilde{Q}(m)$. Då kommer L_m att innehålla åtminstone $\Omega\left(\frac{m^d}{\log(m)}\right)$ primtal. Notera att $|S_m| = \Theta(\tilde{Q}(m)) = \Theta(m^{d-1})$. Från lådprincipen får vi då att det existerar ett polynom $p \in S_m$ så att $p(k)$ är ett primtal för åtminstone $\Omega\left(\frac{m^d}{\log(m)} / m^{d-1}\right) = \Omega\left(\frac{m}{\log(m)}\right)$ olika heltal k .

För tillräckligt stora $m \in \mathbb{N}$ så kommer det därför att existera något polynom $p \in S_m$ så att $p(k)$ är ett primtal för åtminstone n olika heltal k , vilket var vad vi ville visa.

Problem 11. Låt ABC vara en triangel med incentrum I och omskriven cirkel Ω . Låt reflektionen av linjen BC över linjen AI skära Ω i punkterna P och Q . Bevisa att den omskrivna cirkelns medelpunkt av triangeln PIQ ligger på Ω .

Lösningsförslag 1. Denna lösning använder riktade vinklar.

Låt I_A vara A -excentrum i triangeln ABC , låt M vara den andra skärningen av linjen AI med Ω och låt D vara skärningen mellan linjen AI och sidan BC . Låt O vara medelpunkten för den omskrivna cirkeln av triangeln ABC och låt O' vara medelpunkten för den omskrivna cirkeln av triangeln PIQ . Låt ω beteckna den omskrivna cirkeln av triangeln BIC och låt Γ beteckna den omskrivna cirkeln av triangeln PIQ .

Det är välkänt att I_A ligger på ω och att M är medelpunkten av ω .

Om $AB = AC$ så ligger $O' = M$ uppenbarligen på Ω . Fortsättningsvis kan vi därför anta att $AB \neq AC$, vilket implicerar att punkterna A, B, C, M, D, P, I, Q och I_A är parvis distinkta.

Från kordasatsen i D får vi att

$$DP \cdot DQ \stackrel{\Omega}{=} DB \cdot DC \stackrel{\omega}{=} DI \cdot DI_A$$

så I_A ligger på Γ .

Låt B' vara reflektionen av B över linjen AI . Notera att B' ligger på ω eftersom medelpunkten M av ω ligger på linjen AI . Notera även att B' ligger på den omskrivna cirkeln av triangeln CMD , eftersom

$$\angle DMC = \angle AMC = \angle ABC = \angle ABD = \angle DB'A = \angle DB'C.$$

Från kordasatsen i A får vi då att

$$AD \cdot AM \stackrel{(CMD)}{=} AC \cdot AB' \stackrel{\omega}{=} AI \cdot AI_A.$$

Eftersom linjen AO är reflektionen i linjen AI av höjden från hörnet A i triangeln ABC så får vi att $AO \perp PQ$. Vidare, eftersom $OP = OQ$ så är AO mittpunktsnormalen av sträckan PQ , vilket ger oss att $AP = AQ$.

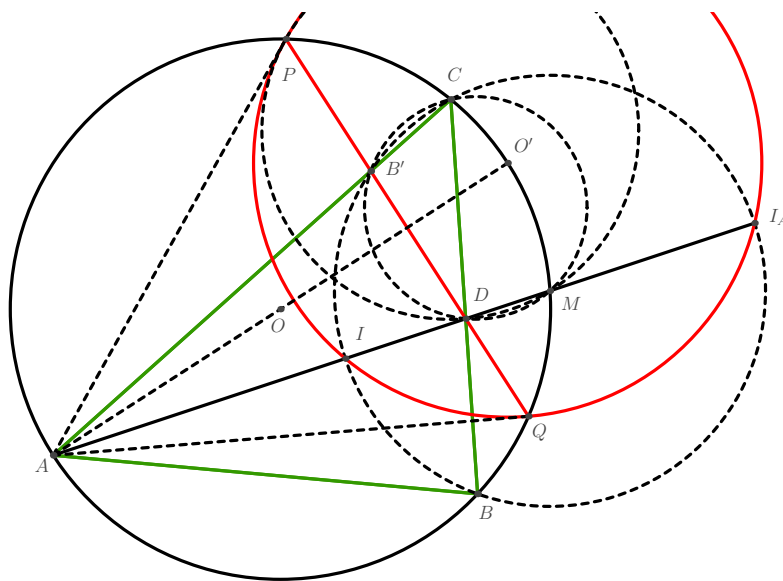
Notera därför att

$$\angle DMP = \angle AMP = \angle AQP = \angle QPA = \angle DPA$$

vilket innebär att linjen AP tangerar den omskrivna cirkeln av triangeln DMP , på grund av kordatangentensatsen. Från kordasatsen i A får vi då att

$$AP^2 \stackrel{(DMP)}{=} AD \cdot AM = AI \cdot AI_A$$

vilket implicerar att linjen AP tangerar Γ . På samma sätt får vi även att linjen AQ tangerar Γ . Därför måste A, P, O' och Q ligga på en cirkel, nämligen cirkeln Ω , vilket var vad vi ville visa.



Lösningförslag 2. Låt Ω beteckna den omskrivna cirkeln av triangeln ABC och låt σ beteckna dess inskrivna cirkel.

På grund av symmetri är sträckan PQ tangent till σ . Vidare har vi då enligt Poncelets porism att det existerar en punkt R på Ω så att σ är den inskrivna cirkeln av triangeln PQR .

Därmed är I incentrum av triangeln PQR , vilket betyder att den omskrivna cirkelns medelpunkt av triangeln PIQ måste ligga på den omskrivna cirkeln av triangeln PQR , som är precis Ω , vilket var vad vi ville visa.

Lösningförslag 3. Låt $\Omega = \Omega_1, \Omega_2$ och Ω_3 beteckna de omskrivna cirklarna av triangelarna ABC , BIC och PIQ , respektive, och låt O_1, O_2 och O_3 beteckna de respektive cirklarnas medelpunkter.

Notera att O_2 ligger på Ω_1 .

Enligt radikalaxelsatsen för Ω_1, Ω_2 och Ω_3 får vi att linjen IO_2 måste vara radikalaxeln av cirkellarna Ω_2 och Ω_3 . Därmed är linjen O_2O_3 vinkelrät mot linjen IO_2 , vilket implicerar att $\angle AO_2O_3 = \frac{\pi}{2}$.

Slutligen, eftersom linjen AO_1 är reflektionen av höjden från A till BC över linjen AI har vi att A måste ligga på mittpunktsnormalen av sträckan PQ . Därför är punkterna A, O_1 och O_3 kolinjära.

Därmed måste O_3 vara den punkt så att AO_3 är en diameter i cirkeln Ω_1 . Med andra ord ligger den omskrivna cirkelns medelpunkt av triangeln PIQ på Ω , vilket var vad vi ville visa.

Problem 12. Bestäm alla reella tal θ med egenskapen att det existerar en oändlig följd $(x_n)_{n=1}^\infty$ av positiva reella tal så att

$$x_{n-1} = x_n \cdot n^{x_n} \quad \text{och} \quad \frac{x_1}{n^\theta} \geq x_n$$

för alla positiva heltal $n > 1$.

Lösningsförslag. Vi hävdar att det existerar en oändlig följd $(x_n)_{n=1}^\infty$ av positiva reella tal som uppfyller de givna villkoren om och endast om $\theta \leq 1$.

Låt $(\star)$ beteckna ekvationen $x_{n-1} = x_n \cdot n^{x_n}$ och låt $(\dagger)$ beteckna olikheten $\frac{x_1}{n^\theta} \geq x_n$.

Lemma 1. Om $\theta > 1$ finns det inga följder $(x_n)_{n=1}^\infty$ av positiva reella tal som uppfyller $(\star)$ och $(\dagger)$.

Bevis av Lemma 1. Antag att det existerar ett reellt tal $\theta > 1$ och en oändlig följd $(x_n)_{n=1}^\infty$ av positiva reella tal som uppfyller $(\star)$ och $(\dagger)$.

För alla positiva heltal $n > 1$ får vi då att

$$n^\theta \stackrel{(\dagger)}{\leq} \frac{x_1}{x_n} = \prod_{k=2}^n \frac{x_{k-1}}{x_k} \stackrel{(\star)}{=} \prod_{k=2}^n k^{x_k} \stackrel{(\dagger)}{\leq} \prod_{k=2}^n k^{x_1 k^{-\theta}}.$$

Tar vi logaritmen på båda sidor får vi att

$$\theta \log(n) \leq x_1 \sum_{k=2}^n \frac{\log(k)}{k^\theta}.$$

Notera att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 \sum_{k=2}^n \frac{\log(k)}{k^\theta} < \infty$$

eftersom $\frac{\log(k)}{k^\theta} \leq k^{-\frac{\theta+1}{2}}$ för alla tillräckligt stora k (och $-\frac{\theta+1}{2} < -1$).

Däremot har vi att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta \log(n) = \infty$$

vilket leder till en motsägelse.

Därför finns det ingen följd $(x_n)_{n=1}^\infty$ av positiva reella tal som uppfyller $(\star)$ och $(\dagger)$ då $\theta > 1$. $\square$

Lemma 2. För alla $\theta \leq 1$ finns det följder $(x_n)_{n=1}^\infty$ av positiva reella tal som uppfyller $(\star)$ och $(\dagger)$.

Bevis av Lemma 2. Vi hävdar att det existerar en följd $(x_n)_{n=1}^\infty$ av positiva reella tal så att

$$x_{n-1} = x_n \cdot n^{x_n} \quad \text{och} \quad x_1 \geq nx_n$$

för alla positiva heltal $n > 1$.

Notera att ekvationen $y = x \cdot n^x$ alltid har en positiv lösning för x för alla $y \in \mathbb{R}^+$ och $n \in \mathbb{N}$. Därför finns det en följd (x_n) som uppfyller $(\star)$ och som har

$$x_1 \geq \max_{n \geq 2} \left\{ n \log_n \left(\frac{n}{n-1} \right) \right\}.$$

[Högerledet ovan är ändligt eftersom

$$n \log_n \left(\frac{n}{n-1} \right) = \frac{\log \left(\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n \right)}{\log(n)} \leq \log \left(\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{2(n-1)} \right) < 3$$

för alla tillräckligt stora n .]

Antag att denna följd inte uppfyller att $x_1 \geq nx_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Då existerar det ett minsta $N \in \mathbb{N}$ för vilket $x_1 < Nx_N$. (Notera att vi nödvändigtvis har $N \geq 2$). Då får vi att

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{N-1} &\geq x_{N-1} \stackrel{(\star)}{=} x_N \cdot N^{x_N} > \frac{x_1}{N} \cdot N^{\frac{x_1}{N}} \\ \therefore N \log_N \left(\frac{N}{N-1} \right) &> x_1 \end{aligned}$$

vilket är en motsägelse.

Alltså uppfyller vår konstruerade följd $(x_n)_{n=1}^\infty$ både $(\star)$ och $x_1 \geq nx_n$ (och därmed även $(\dagger)$, eftersom $\theta \leq 1$) för alla positiva heltal $n > 1$, vilket var vad vi ville visa. $\square$

Därmed finns det oändliga följder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ av positiva reella tal som uppfyller $(\star)$ och $(\dagger)$ för alla positiva heltal $n > 1$ om och endast om $\theta \leq 1$.

Problem 13. Emil har n stenar vars vikter är $1, 2, \dots, n$ kilo. Igår satte han en lapp på varje sten som visade dess vikt, men han är orolig att hans kompis Ivar spelat honom ett spratt och bytt plats på lapparna under natten. Emil vill avgöra om lapparna sitter rätt eller inte genom att göra ett antal vägningar på sin balansvåg. Varje vägning får han reda på vilken vågskål som är tyngst eller ifall båda sidorna väger lika mycket. Emil vill göra ett antal vägningar som garanterat avslöjar ifall lapparna är omkastade. Hur många vägningar behöver han göra?

Ni får fler poäng ju färre vägningar er lösning använder!

Lösningsförslag. Som problembeskrivningen antyder så är detta en ganska öppen fråga med fler olika lösningar. Vi visar här en väldigt effektiv lösning som bara kräver

$$2\lceil \log_2(n) \rceil + 1$$

vägningar. Säg att en sten är "bestämd" om Emil vet att lappen som står på den är korrekt.

Börja med att väga $1 + 2$ mot 3 , sedan $1 + 2 + 3$ mot 6 , sedan $1 + 2 + 3 + 6$ mot 12 o.s.v. I varje steg, väg alla stenar som tidigare vägts mot stenen som ska väga lika mycket. Talet på den ensamma stenen fördubblas då efter varje vägning ända tills summan av alla stenar som vägts är större än n . Talet på den sista stenen som vägts blir då $3 \cdot 2^{\lceil \log n/3 \rceil}$. Alla tal på stenarna som hittills vägts, låt oss kalla denna mängd X , kan nu kombineras och ge vilken heltalssumma som helst mellan 1 och $6 \cdot 2^{\lceil \log n/3 \rceil}$ (tänk binära tal fast gånger tre). I synnerhet kan vi välja några stenar från X vars tal summerar till n och väga dessa mot n , så vi gör just det. Sammanlagt har vi nu använt som högst

$$\lceil \log_2\left(\frac{n}{3}\right) \rceil + 2$$

vägningar. Om vid någon av dessa vägningar båda skålarna inte väger lika mycket så vet Emil direkt att lapparna är ombytta. Samma sak gäller hela tiden, så vi antar hädanefter att resultatet av varje vägning är det förväntade. Om sten 1 och 2 båda är märkta rätt så måste alla andra stenar som hittills vägts (Hela X samt n) också vara det. Om 2 och 1 är felmärkta måste de antingen vara ombytta med varandra eller så är deras sammanlagda vikt > 3 , vilket skulle innebära att alla vägda stenar inklusive sten n skulle väga mer än deras märkta tal, vilket ju inte är möjligt. Vi måste dock fortfarande försäkra oss att sten 1 och 2 inte är ombytta, vilket relativt enkelt kan göras på 1 drag. Vi har på så sätt bestämt alla stenar i X samt stenen märkt med n .

Låt nu Y vara mängden stenar som ännu inte är bestämda. Vi visar nu hur alla dessa kan bestämmas på $\lceil \log_2 n \rceil$ drag. Vi utnyttjar det faktum att ett tal är unikt bestämt av dess $\lceil \log_2 n \rceil$ siffror i binärt. För varje heltal $k \leq \lceil \log_2 n \rceil$, låt L_k och U_k beteckna mängden av alla tal i Y vars k :te siffra i binärt är lika med 0 respektive 1 . Resten av algoritmen beskrivs bäst i pseudokod:

```

for  $k = 1, \dots, \lceil \log_2 n \rceil$ : do
  if  $\text{sum}(L_k) < \text{sum}(U_k)$ : then
    lägg hela  $L_k$  vid vågskål 1
    while summan av stenarna vid vågskål 1 är större än de vid vågskål 2: do
      lägg en sten från  $U_k$  vid vågskål 2. Börja med den med högst tal.
    end while
    Låt  $D$  vara hur mycket mer stenarna vid vågskål 2 väger än stenarna vid vågskål 1 om alla
    etiketter är rätta. Obs:  $D < n$ .
    Välj stenar från  $X$  som tillsammans väger  $D$  och lägg vid vågskål 1.
    Utför vägningen!
  else
    lägg hela  $U_k$  vid vågskål 2
    while summan av stenarna vid vågskål 2 är större än de vid vågskål 1: do
      lägg en sten från  $L_k$  vid vågskål 1. Börja med den med lägst tal.
    end while
    Låt  $D$  vara hur mycket mer stenarna vid vågskål 1 väger än stenarna vid vågskål 2 om alla
    etiketter är rätta. Obs:  $D < n$ .
    Välj stenar från  $X$  som tillsammans väger  $D$  och lägg vid vågskål 2.
    Utför vägningen!
  end if
end for

```

Påstående: Efter k iterationer av denna algoritm har Emil bestämt de första k binära siffrorna av alla stenars vikt.

Bevis av påstående: Per induktion, anta att Emil känner till de första $k - 1$ binära siffrorna av alla stenar. I iteration k är då stenarna i vågskål 1 sammanlagt så lätta som de kan vara om de är märkta rätt. På samma sätt är stenarna i vågskål 2 så tunga de kan vara om de är märkta rätt. Om stenarna i vågskål 1 och 2 inte är de som Emil tror ligger där så skulle alltså vågskål 1 väga mer än vågskål 2.

Om båda skålarna väger lika mycket, vilket de borde göra om alla stenar är rätt markerade, så vet alltså Emil vilka stenar som ligger i båda vågskålarna. I fall 1 innebär detta i synnerhet att han vet vilka som är i L_k och i fall 2 innebär detta att han vet vilka som är i U_k . I vilket fall vet alltså Emil exakt vilka stenar i Y som är i L_k och vilka som är i U_k , vilket bevisar påståendet. $\square$

Efter k iterationer vet alltså Emil de k första binära siffrorna av alla stenars vikter och han kan därmed försäkra sig att alla stenar väger så mycket som deras etikett visar. Totalt användes

$$\begin{aligned} & \lceil \log_2\left(\frac{n}{3}\right) \rceil + 2 + \lceil \log_2(n) \rceil \\ & \leq \lceil 2 \log_2(n) \rceil + 1 \end{aligned}$$

vägningar.

Anmärkning: Detta är inte en optimal lösning, men det går inte att lösa problemet med färre än $\lceil \log_3(n) \rceil$ vägningar. Anledningen är att varje vägning endast grupperar stenarna i tre delar: de i vågskål 1, de i vågskål 2 samt de utanför. För att säkerställa att inga två lapparna är ombytta måste varje par av stenar vid någon vägning placeras i olika grupper och detta kräver just $\lceil \log_3(n) \rceil$ vägningar.