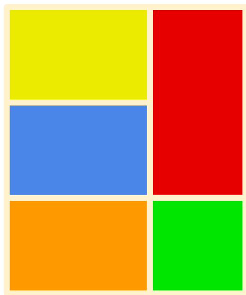
# Öppen tävling den 15-17 maj 2025

**Skrivtid:** 5 timmar
**Hjälpmedel:** endast penna, sudd, passare och linjal
Varje problem är värt 7 poäng.
För full poäng krävs motivering om inget annat anges.

**Problem 1.** En rektangel är indelad i $n$ mindre rektanglar som alla ska målas i olika färger. Dessförinnan måste målartejp sättas längs kanterna runt alla rektanglar. Vad är det minsta antalet tejpbitar som behövs om inga tejpbitar får överlappa?



**Problem 2.** Låt $n$ och $k$ vara positiva heltal med $n \geq \max\{k, 3\}$. Alice och Bengt spelar ett spel på en (oriktad och enkel) graf $G$. I början av spelet är $G$ en komplett graf på $n$ noder. Varje runda väljer Alice först ut $k$ kanter från $G$, och sedan tar Bengt bort en av de kanterna som Alice valt ut.

Spelet tar slut när $G$ bara har $n-1$ kanter kvar. Då vinner Alice vinner om $G$ är sammanhängande och annars vinner Bengt. Vad är det största positiva heltalet $k$, i termer av $n$, så att Alice vinner om båda spelarna spelar optimalt?

**Problem 3.** En groda befinner sig i punkten $(0, 0)$ i planet och börjar hoppa. Grodan gör först ett hopp av längd 1 och hoppar sedan dubbelt så långt för varje hopp. Alla hopp görs parallellt med någon av axlarna. Vilka punkter kan grodan nå genom att hoppa på detta sätt?

**Problem 4.** En pinne av längd 1 delas upp mellan ett uppräkneligt antal personer $P_1, P_2, \ldots$. Först väljer $P_1$ ett tal $U_1$ likformigt slumpmässigt från intervallet $[0, 1]$ och pinnen delas i en bit av längd $U_1$ och en av längd $1 - U_1$. Biten av längd $U_1$ sparar $P_1$ och den andra biten ges till $P_2$. Denne väljer ett tal $U_2$ likformigt slumpmässigt från intervallet $[0, 1]$ och bryter pinnen i två bitar av längd $U_2(1 - U_1)$ och $(1 - U_2)(1 - U_1)$. Den första biten behåller $P_2$ och den andra biten ges vidare till $P_3$, och processen fortsätter så att personen $P_n$ får en bit av längd $U_n(1 - U_{n-1}) \ldots (1 - U_1)$. Vad är sannolikheten att biten som varje person får behålla är kortare än $1/2$?

**Problem 5.** Astronauten Lisa bygger upp mänsklighetens första grönsaksplantage på Mars. Hon bygger det utav ett rutnät av hexagonala odlingsmoduler vars alla sidlängder är 1m långa. Mitt ovanför den mittersta odlingsmodulen placerar hon en ljusspridare som lyser upp alla moduler inom en cirkel med radie 100m. För att en odlingsmodul ska fungera måste den vara helt upplyst. Givet att Lisa har fyllt ljuscirkeln med så många odlingsmoduler som möjligt, bestäm odlingens omkrets.

**Problem 6.** Låt $ABC$ vara en olikbent triangel med incentrum $I$ och omskriven cirkeln $\Omega$. Låt $M$ vara mittpunkten av cirkelbågen på $\Omega$ mellan $B$ och $C$ som innehåller $A$. Låt $D$ vara skärningen mellan linjerna $BC$ och $AM$. Låt $J$ vara den andra skärningen mellan linjen $DI$ och den omskrivna cirkeln av triangeln $BIC$. Bevisa att tangenten vid $J$ till den omskrivna cirkeln av triangeln $BIC$ delar sträckan $DM$ i två lika stora delar.

**Problem 7.** Låt $n$ vara ett positivt heltal. Oskar får en påse med $n$ olika positiva heltal och skriver upp alla möjliga tal på formen $xy + z$ på en tavla, där $x$, $y$ och $z$ är (inte nödvändigtvis olika) tal från påsen. Givet $n$, bestäm det minsta antal *olika* tal som Oskar kan ha skrivit upp på tavlan.

**Problem 8.** Bestäm alla funktioner $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som uppfyller att

$$d\left(\sum_{k=1}^{N} a_k\right) \le d\left(\sum_{k=1}^{N} f(a_k)\right)$$

för alla $N, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{N}$. (Här betecknar $d(n)$ antalet delare av $n$.)

**Problem 9.** Låt $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\ldots$, vara en oändlig följd av distinkta positiva heltal och låt $N$ vara ett positivt heltal. Det visar sig att för varje heltal $n > N$ så är $a_n$ lika med det minsta positiva heltalet som inte kan skrivas som en summa av olika element i mängden $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.

Bevisa att det existerar ett positivt heltal $M$ så att $a_m = 2a_{m-1}$ för alla $m > M$.

**Problem 10.** Låt $P$ vara ett icke-konstant heltalspolynom med positiv ledande koefficient. För varje positivt heltal $n$, visa att det finns ett heltal $c$ sådant att $P(x) + c$ är ett primtal för minst $n$ olika heltal $x$.

**Problem 11.** Låt $ABC$ vara en triangel med incentrum $I$ och omskriven cirkel $\Omega$. Låt reflektionen av linjen $BC$ över linjen $AI$ skära $\Omega$ i punkterna $P$ och $Q$. Bevisa att den omskrivna cirkelns medelpunkt av triangeln $PIQ$ ligger på $\Omega$.

**Problem 12.** Bestäm alla reella tal $\theta$ med egenskapen att det existerar en oändlig följd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ av positiva reella tal så att

$$x_{n-1} = x_n \cdot n^{x_n} \quad \text{och} \quad \frac{x_1}{n^{\theta}} \ge x_n$$

för alla positiva heltal $n > 1$.

**Problem 13.** Emil har $n$ stenar vars vikter är $1, 2, \ldots, n$ kilo. Igår satte han en lapp på varje sten som visade dess vikt, men han är orolig att hans kompis Ivar spelat honom ett spratt och bytt plats på lapparna under natten. Emil vill avgöra om lapparna sitter rätt eller inte genom att göra ett antal vägningar på sin balansvåg. Varje vägning får han reda på vilken vågskål som är tyngst eller ifall båda sidorna väger lika mycket. Emil vill göra ett antal vägningar som garanterat avslöjar ifall lapparna är omkastade. Hur många vägningar behöver han göra?

*Ni får fler poäng ju färre vägningar er lösning använder!*