

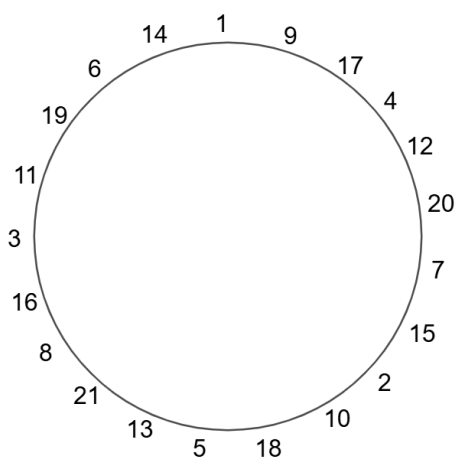


Högstadietävling den 16 maj 2025

Lösningsförslag

Problem 1. Skriv talen $1, 2, \dots, 21$ i en cirkel i någon ordning så att skillnaden mellan två tal bredvid varandra alltid är antingen 8 eller 13. (*Endast svar krävs.*)

Lösningsförslag. Man kan placera talen enligt följande:



Problem 2. Under fredag, lördag och söndag åt John ett antal vindruvor. Han åt lika många röda vindruvor varje dag, och totalt åt han under de tre dagarna lika många röda som gröna vindruvor. Om John åt 5 vindruvor på fredagen och 18 vindruvor på lördagen, hur många *gröna* vindruvor åt han på söndagen?

Lösningsförslag. Den viktiga frågan i detta problem är: Hur många röda vindruvor åt John varje dag? Vi kan kalla detta antal för x . Följande tabell visar då antalet röda och gröna vindruvor som John åt varje dag:

	Fredag	Lördag	Söndag
Röda	x	x	x
Gröna	$5 - x$	$18 - x$	?

Vi ser att x som högst kan vara 5 eftersom $5 - x$ inte får vara negativt. Det finns alltså bara fem fall att testa: $x = 1, 2, 3, 4$, eller 5. Om x är 4 eller mindre så märker vi att antalet röda vindruvor John åt totalt ($3x$) alltid är mindre än antalet gröna vindruvor han åt dag två ($18 - x$). Detta är omöjligt eftersom det var givet att han åt lika många röda som gröna vindruvor, alltså finns det bara ett alternativ kvar och det är att John åt $x = 5$ vindruvor varje dag. Då får vi att han åt 0, respektive 13 vindruvor på fredagen och lördagen vilket tillsammans är två färre än antalet röda vindruvor han åt. På söndagen måste han alltså ha ätit 2 gröna vindruvor.

Problem 3. I år har höjdpunkten en logga gjord av tolv kvadrater som tillsammans bildar en rektangel. Se längst upp på sidan. Om höjden av denna rektangel är 11 längdenheter, hur bred är den?

Lösningsförslag. Kvadraterna runt bokstäverna H, Ö, J och D har samma sidlängd som vi kan kalla x . På samma sätt har kvadraterna runt P, U, N, K, T, E och N samma sidlängd som vi kan kalla y . För att kvadraterna ska passa ihop i höjddled måste

$$x + y = 11 \implies y = 11 - x.$$

I breddled får vi sedan

$$4x = 7y = 7 \cdot (11 - x) = 77 - 7x \tag{1}$$

$$\implies 4x + 7x = 77 \tag{2}$$

$$\implies x = \frac{77}{4 + 7} = \frac{77}{11} = 7. \tag{3}$$

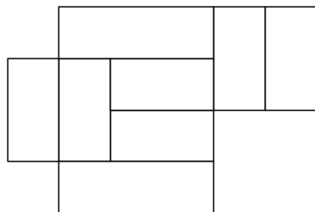
Loggan är alltså $11 + 4 \cdot 7 = 39$ längdenheter lång.

Problem 4. Sofia har en balansvåg samt nio vikter som väger 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, respektive 141 gram. Hur kan hon balansera dessa vikter på vågen utan att det blir några över? (*Endast svar krävs.*)

Lösningsförslag. **Skål 1** 141 g, 32 g, 16 g, 8 g, 1 g
 Skål 2 128 g, 64 g, 4 g, 2 g

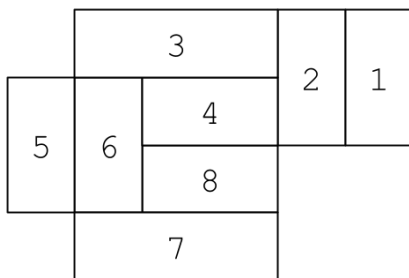
Man kan till exempel komma fram till denna lösning genom att placera vikterna på vågen i storleksordning från störst till minst och alltid lägga nästa vikt på vågskålen som vid det laget har minst vikt på sig.

Problem 5. Vi kallar två tal för *differensdelbara* om de båda är delbara med deras skillnad. Placera ut talen 1 till 8 i figuren nedan så att tal i angränsande rektanglar är differensdelbara. (*Endast svar krävs*)

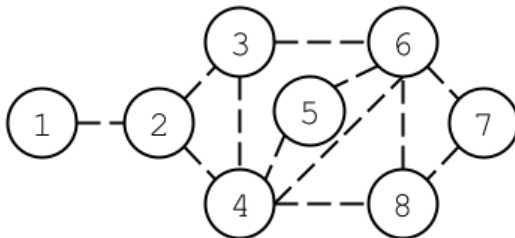


Till exempel är 10 och 20 differensdelbara eftersom $20 - 10 = 10$ delar båda talen. Däremot är 17 och 25 inte differensdelbara eftersom de inte är delbara med $25 - 17 = 8$.

Lösningsförslag. Talen kan placeras på följande sätt:

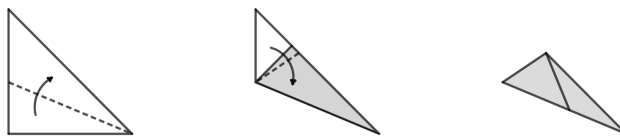


Kommentar: Det går att visa att detta är den enda möjliga lösningen. Vi gör detta genom att rita upp en graf (ett nätverk) över vilka tal som kan stå bredvid varandra.



Vi börjar med att notera att talet 1 endast kan ha en granne, och måste därför stå i rektangeln längst till höger eller längst till vänster. Om den står i rektangeln längst till vänster måste talet 2 stå i rektangeln höger om det, vilket inte går eftersom talet 2 kan ha som mest tre grannar, men den rektangeln har fem grannar. Därför måste talen 1 och 2 vara på de platser som syns i lösningen. Bredvid talet 2 står talen 3 och 4. Eftersom talet 3 har som flest tre grannar måste det stå i den avlånga rektangeln längst upp. Därför måste talen 3 och 4 vara på de platser som syns i lösningen. Den tredje grannen till talet 3 kan endast vara talet 6. Därför måste talet 6 vara på den plats som syns i lösningen. Titta på den understa rektangeln som angränsar till rektanglarna med talen 4 och 6. Det är bara talen 3 och 8 som kan stå där, men talet 3 är redan utplacerat. Därför måste talet 8 vara på den plats som syns i lösningen. Titta på den understa rektangeln som angränsar till rektanglar med talen 6 och 8. Det är bara talen 4 och 7 som kan stå där, men talet 4 är redan utplacerat. Därför måste talet 7 vara på den plats som syns i lösningen. Kvar är bara talet 5, som tvingas vara i rektangeln längst till vänster.

Problem 6. Theodor gör en triangel genom att halvera ett kvadratisk pappersark längs diagonalen. Sedan viker han papperet två gånger som på bilden så att det blir en mindre triangel. Bestäm den nya triangelns alla tre vinklar.



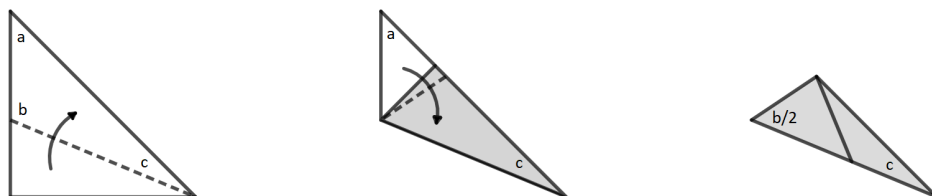
Lösningförslag. Den första triangelns vinklar är 90° , 45° , respektive 45° . Efter en vikning halveras vinkeln vid ett av 45° -hörnerna och skapar på så sätt vinkeln $c = \frac{45}{2} = 22.5^\circ$. Vi använder sedan att vinkelsumman i en triangel är 180° för att beräkna b :

$$b = 180^\circ - a - c = 180^\circ - 45^\circ - 22.5^\circ = 112.5^\circ.$$

Efter ytterligare en vikning halveras vinkeln b , vilket ger vinkeln $b/2 = \frac{112.5}{2} = 56.25^\circ$. Den allra sista vinkeln blir

$$180^\circ - \frac{b}{2} - c = 180^\circ - 56.25^\circ - 22.5 = 101.25^\circ$$

Svar: 22.5° , 56.25° och 101.25° .



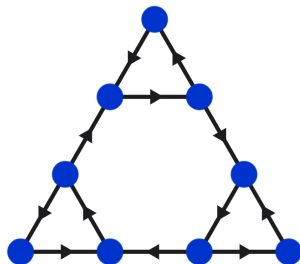
Problem 7. Emil har 6 stenar vars vikter är 1, 2, 3, 4, 5 respektive 6 kilo. Igår satte han en lapp på varje sten som visade dess vikt, men han är orolig att hans kompis Ivar spelat honom ett spratt och bytt plats på lapparna under natten. Emil vill avgöra om lapparna sitter rätt eller inte genom att göra ett antal vägningar på sin balansvåg. Efter varje vägning får han reda på vilken vågskål som är tyngst, eller att båda väger lika mycket. Kan ni komma på några vägningar Emil kan göra som garanterat avslöjar Ivar om han flyttat på lapparna?

Ni får fler poäng ju färre vägningar er lösning använder i värsta fall!

Lösningsförslag. Det finns flera lösningar som använder tre vägningar. Det finns dock ett sätt att lösa problemet med bara två vägningar:

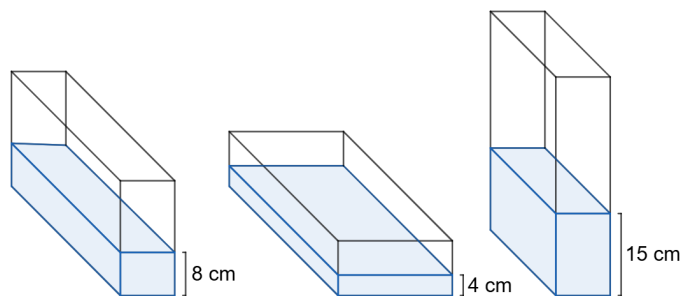
1. Lägg sten 1, 2 och 3 i vänstra skålen och sten 6 i högra skålen. Om skålarna inte väger lika mycket så måste lapparna vara ombytta. Om de väger lika mycket måste de i vänstra skålen väga 1, 2 och 3 kilo och den stenen i högra skålen väga 6 kilo för annars hade den vänstra vågskålen vägt mer än den högra.
2. Det återstår att ta reda på vilka av sten 1, 2 och 3 som väger 1, 2 och 3 kilo samt vilken av sten 4 och 5 som väger 4 och 5 kilo. Detta kan göras genom att lägga sten 3 och 5 i vänstra vågskålen och sten 1 och sten 6 i den högra vågskålen. Om den vänstra vågskålen väger mer än den högra vågskålen innebär det att alla lappar sitter där de ska. Det kan vi veta eftersom sten 3 och sten 5 tillsammans som mest kan väga 8 och sten 1 och 6 som minst kan väga 7.

Problem 8. I ett triviaspel ser spelplanen ut som i figuren nedan. Man börjar på någon ruta. I varje runda går man sedan ett steg längs med en pil. Man får bara gå i den riktning som pilen pekar. Är det möjligt att efter exakt 20 steg komma tillbaka till samma ruta som man började på?



Lösningförslag. Betrakta någon väg som börjar och slutar på samma ställe. Antalet steg blir 6 för varje gång man gått runt den mittersta sexhörningen plus 3 gånger antalet gånger man gått runt någon av de mindre trianglarna. Men man kan inte få 20 bara genom att addera 6:or och 3:or eftersom 20 inte är delbart på 3. Alltså kan man inte komma tillbaka till samma ställe efter exakt 20 drag.

Problem 9. Cecilia håller tre liter vatten i en rektangulär glasbehållare med lock. När hon lägger den på ett bord blir vattennivån 8 cm, 4 cm eller 15 cm beroende på hur hon roterar den. Vad är behållarens volym?



Lösningsförslag. Låt x , y och z beteckna behållarens sidlängder där $x < y < z$. Vattnets volym (3000 milliliter) kan då räknas ut på tre olika sätt, vilket ger

$$3000 = 8xz = 4yz = 15xy$$

Att $8xz = 4yz$ innebär att $y = 2x$. Alltså är

$$\begin{aligned} 3000 &= 15xy = 30x^2 \\ \Rightarrow x^2 &= 3000/30 = 100 \\ \Rightarrow x &= 10 \\ \Rightarrow y &= 2x = 20 \\ \Rightarrow z &= \frac{3000}{8 \cdot 10} = 37.5 \end{aligned}$$

Behållarens volym blir alltså

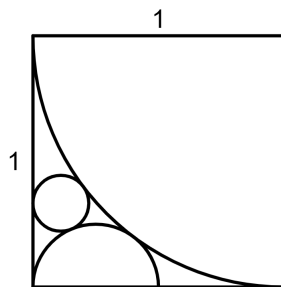
$$xyz = 10 \cdot 20 \cdot 37.5 = 7500 \text{ ml.}$$

Problem 10. Ett palindromtal är ett tal som är likadant läst baklänges som framlänges, till exempel 494. Om du multiplicerar ihop alla tresiffriga palindromtal, hur många nollor slutar produkten på?

Lösningsförslag. Antalet nollor som ett tal slutar på avgörs av hur många gånger det är delbart på $10 = 5 \cdot 2$. Bland alla tresiffriga palindromtal så multiplicerar man väldigt många tal delbara på 2 (jämna), så det räcker därmed att räkna hur många gånger produkten är delbar med 5. De enda palindromtalen som är delbara på 5 är 515, 525, 535, 545, 555, 565, 575, 585, 595 och 505 (10 stycken). Bland dessa är endast 525 och 575 delbara på 5 två gånger medans resterande 8 är delbara på 5 exakt en gång. Produkten av alla dessa tal är alltså delbar med 5 exakt $8 + 2 \cdot 2 = 12$ gånger.

Svar: 12 nollor.

Problem 11. En kvartscirkel, en halvcirkel och en cirkel är hoppackade i en kvadrat med sidlängd 1 längdenhet, som i bilden nedan. Bestäm diametern på a) halvcirkeln b) cirkeln.



Lösningsförslag. (a) Låt r vara halvcirkelns radie. Från pythagoras sats får vi att

$$\begin{aligned}(1-r)^2 + 1^2 &= (1+r)^2 \\ \implies 1 - 2r + r^2 + 1 &= 1 + 2r + r^2 \\ \implies 1 &= 4r \\ \implies r &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

- (b) Låt (x, y) vara positionen av den lilla cirkelns medelpunkt där vi sätter origo i nedre vänstra höret. Eftersom cirkeln tangerar vänstra kanten av kvadraten så är x även radien. Avstånden från dess medelpunkt till kvartscirkelns och halvcirkelns medelpunkter måste vara $x+1$ respektive $x+r$, vilket enligt Pythagoras sats ger

$$\begin{cases} (r-x)^2 + y^2 = (r+x)^2 \\ (1-x)^2 + (1-y)^2 = (1+x)^2 \end{cases}$$

Om vi expanderar, simplificerar och lägger in att $r = \frac{1}{4}$ får vi

$$\begin{aligned} &\begin{cases} r^2 - 2rx + x^2 + y^2 = r^2 + 2rx + x^2 \\ 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 = 1^2 + 2x + x^2 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} y^2 = 4rx = x \\ (1-y)^2 = 4x \end{cases} \end{aligned}$$

Därmed är $(1-y)^2 = 4y^2$ eftersom både $(1-y)^2$ och $4y^2$ är lika med $4x$. Vi kan nu ta kvadratroten ur båda led och få

$$1-y = 2y \implies y = \frac{1}{3}.$$

Och vi får slutligen $x = y^2 = \frac{1}{9}$.

Problem 12. En groda befinner sig i punkten med koordinater $(0,0)$ i planet och börjar hoppa. Grodan gör först ett hopp av längd 1 och hoppar sedan dubbelt så långt för varje hopp. Alla hopp görs parallellt med någon av koordinataxlarna. Vilka punkter kan grodan nå genom att hoppa på detta sätt?

Svar: Alla punkter (x, y) där $x + y$ är udda.

Obs: En alternativ lösning hittas i lösningsförslagsdokumentet för gymnasietävlingen

Lösningsförslag. Låt oss kalla en punkt (x, y) för udda/jämn om $x + y$ är udda/jämnt. Efter första hoppet är grodan på någon av punkterna $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ och $(-1, 0)$. Alla dessa punkter är udda. Alla hopp som grodan gör efter det förändrar $x + y$ med ett jämnt tal, därför kommer grodan aldrig kunna nå en jämn punkt.

Låt K_n vara kvadraten med hörn i de fyra punkterna $(-2^n, 0)$, $(2^n, 0)$, $(0, -2^n)$, $(0, 2^n)$. Vi hävdar att punkterna som grodan kan nå efter n drag är precis de udda punkterna som ligger inuti K_n . För $n = 1$ stämmer påståendet. Antag att påståendet stämmer för $n = p$. Vi visar nu att påståendet stämmer för $n = p + 1$. Eftersom påståendet stämmer för $n = p$ har vi att grodan kan gå till alla udda punkter inuti K_p på exakt p hopp. Låt $K_p^\uparrow, K_p^\downarrow, K_p^\leftarrow, K_p^\rightarrow$ vara de fyra kvadrater som fås om man skiftar K_p upp, ner, vänster, eller höger 2^p steg. De punkterna grodan kan nå efter $p + 1$ steg är precis de udda punkterna som finns i antingen $K_p^\uparrow, K_p^\downarrow, K_p^\leftarrow$, eller $K_p^\rightarrow$ beroende på vilken riktning det sista hoppet var i. Tillsammans bildar dock dessa fyra kvadrater den större kvadraten K_{p+1} vilket visar att påståendet stämmer för $n = p + 1$. Vi vet nu med hjälp av induktion att påståendet stämmer för alla n och därmed kan grodan nå alla udda punkter.

