



Gymnasietävling den 15 maj 2025

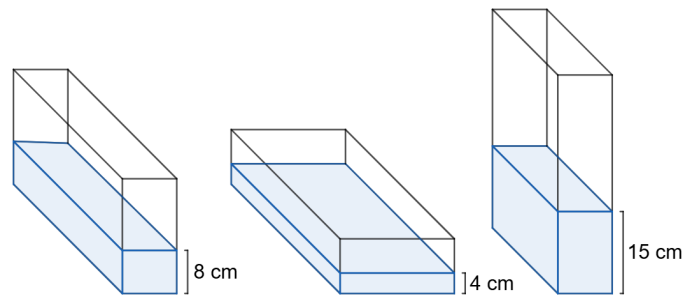
Lösningsförslag

Problem 1. Sofia har en balansvåg samt nio vikter som väger 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, respektive 1410 gram. Hur kan hon balansera dessa vikter på vågen utan att det blir några över? Endast svar krävs.

Lösningsförslag. **Skål 1** 1410 g, 320 g, 160 g, 80 g, 10 g
 Skål 2 1280 g, 640 g, 40 g, 20 g

För att komma fram till denna lösning kan man till exempel placera vikterna på vågen i storleksordning från störst till minst och alltid lägga nästa vikt på vågskålen som vid det laget har minst vikt på sig.

Problem 2. Cecilia håller tre liter vatten i en rektangulär glasbehållare med lock. När hon lägger den på ett bord blir vattennivån 8 cm, 4 cm eller 15 cm beroende på hur hon roterar den. Vad är behållarens volym?



Lösningsförslag. Låt den rektangulära glasbehållaren ha dimensioner a cm $\times$ b cm $\times$ c cm.

Eftersom volymen vatten i behållaren är 3 L = 3000 cm³ har vi att

$$\begin{cases} 8ab = 3000 \\ 4bc = 3000 \\ 15ca = 3000 \end{cases} .$$

Multiplikerar vi ihop dessa ekvationer får vi att

$$\begin{aligned} \Rightarrow 8ab \cdot 4bc \cdot 15ca &= 3000^3 \\ \Rightarrow 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (abc)^2 &= 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^9 \\ \Rightarrow (abc)^2 &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^8 \\ \Rightarrow abc &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5^4 = 7500 \end{aligned}$$

så volymen av den rektangulära glasbehållaren är: a cm $\times$ b cm $\times$ c cm = 7500 cm³ = 7.5 L.

Problem 3. Ett palindromtal är ett tal som är likadant baklänges som framlänges, till exempel 494. Om du multiplicerar ihop alla tresiffriga palindromtal, hur många nollor slutar produkten på?

Lösningförslag. Antalet nollor i slutet av produkten är lika med antalet gånger som 10 delar produkten. Notera att $10 = 5 \cdot 2$, så vi behöver hitta hur många gånger 5 och 2 delar produkten.

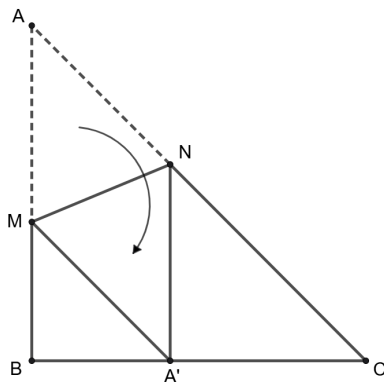
Notera att palindromtalen på formen $5X5$, där $0 \leq X \leq 9$, är de enda tresiffriga palindromtalen delbara med 5. För $X \neq 2, 7$ så är dessa palindromtal delbara med 5 exakt en gång, och för $X = 2, 7$ så är de delbara med 5 exakt två gånger. Därför är produkten av alla tresiffriga palindromtal delbar med 5 tolv gånger.

Notera att produkten av alla tresiffriga palindromtal är delbar med 2 åtminstone tolv gånger, eftersom alla palindromtal på formerna $2X2$ och $4X4$, där $0 \leq X \leq 9$, är delbara med 2 åtminstone en gång var.

Därför slutar produkten av alla tresiffriga palindromtal på exakt

Svar: tolv stycken nollor.

Problem 4. Theodor gör en triangel genom att halvera ett $1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm}$ kvadratisk pappersark längs diagonalen. Han viker sedan över hörnet A till punkten A' så att vecket MN bildas (där M och N ligger på AB respektive AC) och så att $A'N$ blir vinkelrät mot BC . I vilket förhållande delar A' sträckan BC ?



Lösningsförslag. Längden på AN förändras inte under vikningen, alltså är

$$AN = A'N = \sin(45^\circ)NC = \frac{1}{\sqrt{2}}CN \iff \frac{CN}{AN} = \sqrt{2}.$$

Transversalsatsen ger sedan

$$\frac{CA'}{BA'} = \frac{CN}{AN} = \sqrt{2}.$$

Svar: A' delar sträckan BC i delarna BA' och CA' som har förhållandet $1 : \sqrt{2}$.

Problem 5. En groda befinner sig i punkten med koordinater $(0,0)$ i planet och börjar hoppa. Grodan gör först ett hopp av längd 1 och hoppar sedan dubbelt så långt för varje hopp. Alla hopp görs parallellt med någon av koordinataxlarna. Vilka punkter kan grodan nå genom att hoppa på detta sätt?

Lösningsförslag. Notera att grodan endast kan nå punkter med heltalskoordinater (x,y) så att $x+y$ är udda. Detta eftersom $x+y$ är udda efter första hoppet och förblir udda eftersom alla hopp efter det första är av jämn längd. Vi hävdar att grodan kan nå alla dessa punkter.

Lemma 1. Låt $n \in \mathbb{N}$. Grodan kan hoppa till alla punkter (x,y) med heltalskoordinater där $x+y$ är udda och $|x|+|y| \leq 2^n - 1$ på exakt n hopp.

Obs: En alternativ lösning hittas i lösningsförslagsdokumenten för högstadietävlingen

Bevis av Lemma 1. Vi kommer att bevisa lemmat genom induktion på n .

Basfall ($n = 1$): På sitt första hopp kan grodan hoppa till $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ eller $(0,-1)$, vilket omfattar alla punkter (x,y) med heltalskoordinater så att $x+y$ är udda och $|x|+|y| \leq 2^1 - 1$.

Induktionssteg ($n > 1$): Notera att grodan kan hoppa till alla punkter (x',y') med heltalskoordinater så att $x'+y'$ är udda och $|x'|+|y'| \leq 2^{n-1} - 1$ på exakt $n-1$ hopp. Betrakta en punkt (x,y) med heltalskoordinater så att $x+y$ är udda och $|x|+|y| \leq 2^n - 1$. Vi har att $x \neq y$ eftersom $x+y$ är udda. På grund av symmetri kan vi anta att $x > y \geq 0$. Punkten $(x-2^{n-1},y)$ är udda eftersom $n > 1$ och vi har:

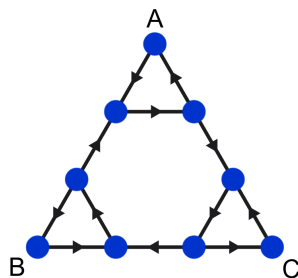
$$\begin{cases} x \geq 2^{n-1} \Rightarrow |x-2^{n-1}|+|y| = x-2^{n-1}+y \leq 2^n-1-2^{n-1} = 2^{n-1}-1 \\ x < 2^{n-1} \Rightarrow |x-2^{n-1}|+|y| = 2^{n-1}-x+y = 2^{n-1}-(x-y) \leq 2^{n-1}-1 \end{cases}$$

Vi har då enligt induktionsantagandet att $(x-2^{n-1},y)$ kan nås efter $n-1$ drag och därför kan (x,y) nås efter n hopp (hopp nummer n är av längd 2^{n-1}).

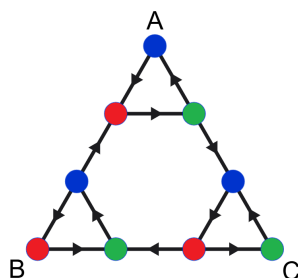
Då har vi visat att grodan kan hoppa till alla punkter (x,y) med heltalskoordinater så att $x+y$ är udda och $|x|+|y| \leq 2^n - 1$ på exakt n hopp, vilket implicerar induktionssteget. $\square$

Därför är mängden punkter som grodan kan hoppa till exakt de punkterna (x,y) med heltalskoordinater så att $x+y$ är udda.

Problem 6. I ett triviaspel ser spelplanen ut som i figuren nedan. Tre spelare, A, B, och C börjar i varsitt hörn på planen. I varje runda går de sedan ett steg längs med en pil. De får bara gå i den riktning som pilen pekar. I slutet har alla spelare gått 20 steg. Bevisa att alla spelare slutar på olika rutor.



Lösningsförslag. Rutorna kan färgläggas röda, blåa och gröna som på bilden:

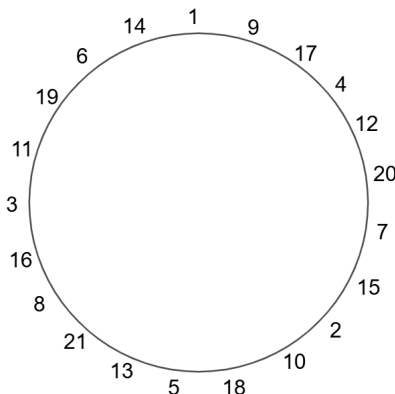


Varje drag måste man då gå från en blå till en röd, från en röd till en grön eller från en grön till en blå ruta. Alla spelare börjar på olika färgade rutor och kommer därmed fortsätta vara på olika färgade rutor efter varje runda. I synnerhet är alla spelare på olika rutor efter 20 rundor, vilket skulle visas.

Problem 7. Fibonaccitalen $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ är talföljden man får om man börjar med två ettor och sedan beräknar nästa tal genom att addera de två föregående talen med varandra.

- (a) Skriv heltalen $1, 2, 3, 4, \dots, 20, 21$ i en cirkel i någon ordning så att skillnaden mellan två tal bredvid varandra alltid är antingen 8 eller 13.
- (b) Låt a , b och n vara tre på varandra följande Fibonaccital. Bevisa att det alltid går att skriva talen $1, 2, \dots, n$ i en cirkel så att skillnaden mellan två tal bredvid varandra alltid är antingen a eller b .

Lösningsförslag. (a)



För del (b) visar vi två lösningar.

Lösning 1. Vi använder induktion.

Induktionsbas: För $a = 1$, $b = 1$ och $n = 2$ är påståendet självklart.

Induktionshypotes: Anta att talen $1, \dots, n$ kan skrivas i en cirkel så att skillnaden mellan två tal alltid är antingen a eller b för några på varandra följande Fibonaccital a , b och n .

Induktionssteg Fibonaccitalet efter n är ju $n + b$, så vi måste alltså visa att talen $1, \dots, n + b$ kan skrivas i en cirkel så att skillnaden mellan grannarna antingen är b eller n . Börja med att skriva ner talen $1, \dots, n$ runt cirkeln som i induktionshypotesen. Vi får då att

- För alla $k = 1, \dots, a$ är $k - b < 1$ och $k - a < 1$. Alltså måste k ha $k + a$ och $k + b$ som grannar.
- För alla $k = a + 1, \dots, b$ så är $k - b < 1$ och $k + b > n$. Alltså måste k ha $k + a$ och $k - a$ som grannar.
- För alla $k = b + 1, \dots, n$ så är $k + a > n$ och $k + b > n$. Alltså måste k ha $k - a$ och $k - b$ som grannar.

Alla tal $k = 1, \dots, b$ har alltså $k + a$ som en granne, medan resterande tal på cirkeln inte har det. För alla $k = 1, \dots, b$, skriv in talet $k + n$ mellan k och $k + a$. Denna metod lägger till varje tal från $n + 1$ till $n + b$ på cirkeln vilket innebär att det på cirkeln nu står alla tal från 1 till $n + b$. Ytterligare är alla grannar som skiljde sig med a separerade från varandra och alla nya tal skiljer sig från sina grannar med antingen b eller n . Vi har på så sätt visat att talen $1, \dots, n + b$ kan skrivas runt cirkeln så att alla tal skiljer sig från sina grannar med antingen n eller $n + b$. Detta slutför induktionssteget.

Lösning 2. Två på varandra följande Fibonaccital är alltid relativt prima - ett lemma som både är välkänt och kan bevisas snabbt med induktion. Låt a , b och n vara tre på varandra följande Fibonaccital. På cirkeln, skriv talen $s_1, \dots, s_n$ enligt formeln $s_i = 1 + (ib \% n)$ (där $\%n$ betecknar resten efter division med n). Eftersom b och n är relativt prima får vi varje tal mellan 1 och n exakt en gång. Differensen mellan termerna blir dessutom

$$s_{k+1} - s_k \equiv (k+1)b - kb \equiv b \pmod{n}$$

och eftersom differenserna också är som högst $n - 1$ i absolutbelopp ger detta två alternativ:

$$s_{k+1} - s_k = b \quad \text{eller} \quad s_{k+1} - s_k = b - n = -a.$$

Alltså skiljer sig alla närliggande tal med antingen a eller b , vilket skulle visas.

Problem 8. Talet $n = 10^9 + 7$ är ett primtal. Talen $1, 2, 3, \dots, n$ placeras på en cirkel i den ordningen (1 är bredvid n). Det dras en rät linje som separerar talen i två grupper. Båda grupperna har samma summa. Visa att det bara finns en möjlig sådan uppdelning och hitta den.

Lösningsförslag. I cirkeln är skillnaden mellan alla intilliggande tal 1 förutom 1 och n som skiljer sig med $n - 1$. Det kommer alltså vara någon sida av linjen där alla tal kommer efter varandra. Om vi låter a och b beteckna det minsta respektive största talet vid den sidan av linjen så blir den gruppens summa

$$a + a + 1 + a + 2 + \dots + b - 1 + b = \frac{1}{2}(a + b)(b - a + 1) \quad (1)$$

(summan av en aritmetisk talföljd är medelvärde gånger antalet termer) Om båda delarna ska vara lika stora så måste (1) vara hälften av summan av alla talen runt cirkeln, det vill säga

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a + b)(b - a + 1) &= \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + n) \\ \iff 2(a + b)(b - a + 1) &= n(n + 1) \end{aligned} \quad (2)$$

där vi återigen använde formeln för en aritmetisk summa. Vi ser här att n måste vara en delare till $2(a + b)(b - a + 1)$ och eftersom n är ett primtal större än 2 så måste därmed n antingen dela $a + b$ eller $b - a + 1$. Att n delar $b - a + 1$ är omöjligt eftersom det hade inneburit att $a = 1$ och $b = n$, vilket självfallet inte är en lösning. Alltså måste n dela $a + b$. Men eftersom både a och b är som högst n så finns det bara två multiplar av n som $a + b$ kan vara, nämligen $2n$ och n . Dessutom kan $a + b$ inte vara $2n$ eftersom det hade inneburit att $a = n$ och $b = n$, vilket inte är en lösning. Det finns därför bara en möjlighet: att $a + b = n$. Substitution i (2) ger att

$$\begin{aligned} 2(b - a + 1) &= n + 1 \\ \iff 2((n - a) - a + 1) &= n + 1 \\ \iff 4a &= 2(n + 1) - (n + 1) \\ \iff a &= \frac{n + 1}{4} \end{aligned}$$

vilket sedan ger oss

$$b = n - \frac{n + 1}{4} = \frac{3n - 1}{4}$$

Om vi substituerar in dessa värden tillbaka i (1) så får vi mycket riktigt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a + b)(b - a + 1) &= \frac{1}{2}\left(\frac{3n - 1}{4} + \frac{n + 1}{4}\right)\left(\frac{3n - 1}{4} - \frac{n + 1}{4} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4n}{4}\right)\left(\frac{2n + 2}{4}\right) \\ &= \frac{n(n + 1)}{4} \end{aligned}$$

som önskat.

Svar: Den ena gruppen är alla tal från $a = \frac{n+1}{4} = 2.5 \cdot 10^8 + 2$ till $b = \frac{3n-1}{4} = 7.5 \cdot 10^8 + 5$. Den andra gruppen har resterande tal.

Problem 9. Fem punkter A, B, C, D och E ligger på en cirkel i den ordningen så att $|BA| = |BC|$, $|DA| = |DE|$ och $|BD| = |CE|$. Bevisa att $\angle BAD = 60^\circ$.

Lösningförslag. Vi kan utan inskränkning anta att cirkeln har radie 1, samt att punkterna A, B, C, D och E ligger i motsols ordning på cirkeln.

Låt x vara längden av cirkelbågen från A till B i motsols riktning, y vara längden av cirkelbågen från B till C i motsols riktning, z vara längden av cirkelbågen från C till D i motsols riktning, w vara längden av cirkelbågen från D till E i motsols riktning och t vara längden av cirkelbågen från E till A i motsols riktning.

Notera då att

$$x + y + z + w + t = 2\pi$$

och $0 < x, y, z, w, t < 2\pi$. För alla par av kordor som är lika långa finns det ett par av cirkelbågar som är lika långa. Notera dock att varje korda har två cirkelbågar mellan sina ändpunkter och att vi måste ta reda vilka av dessa som faktiskt är lika.

Eftersom $|BA| = |BC|$ har vi att

$$\begin{cases} x = y \\ x = x + z + w + t \end{cases}$$

$$\therefore x = y.$$

Eftersom $|DA| = |DE|$ har vi att

$$\begin{cases} x + y + z = w \\ x + y + z = t + x + y + z \end{cases}$$

$$\therefore x + y + z = w.$$

Eftersom $|BD| = |CE|$ har vi att

$$\begin{cases} y + z = t + x + y \\ y + z = z + w \end{cases}$$

och eftersom $z + w = z + (x + y + z) > y + z$ måste vi ha att

$$y + z = t + x + y.$$

Från randvinkelsatsen har vi att

$$\angle BAD = \frac{y + z}{2}.$$

Slutligen, notera att

$$\begin{aligned} 2\pi &= (x + y + t) + (z + w) \\ &= (y + z) + (z + (x + y + z)) \\ &= (y + z) + (z + y + y + z) \\ &= 3(y + z) \\ \therefore \frac{y + z}{2} &= \frac{\pi}{3} \\ \therefore \angle BAD &= 60^\circ \end{aligned}$$

vilket var vad vi ville visa.

Problem 10. Låt n vara ett positivt heltal. Alice får en påse med n olika positiva heltal och skriver upp alla möjliga tal på formen $xy + z$ på en tavla, där x, y och z är (inte nödvändigtvis olika) tal från påsen. Givet n , bestäm det minsta antal *olika* tal som Alice måste ha skrivit upp på tavlan, oberoende av vilka tal som fanns i påsen.

Lösningsförslag. För en mängd S av n positiva heltal, låt

$$T(S) = \{xy + z \mid x, y, z \in S\}.$$

Vi hävdar att den minsta möjliga storleken på $T(S)$ är $n^2 + n - 1$.

Lemma 1. Om $S = \{1, \dots, n\}$ så är $|T(S)| = n^2 + n - 1$.

Bevis av Lemma 1. Om $S = \{1, \dots, n\}$ så är det uppenbart att $T(S) = \{2, \dots, n^2 + n\}$. Då har vi att $|T(S)| = n^2 + n - 1$, vilket var vad vi ville visa. $\square$

Lemma 2. För alla mängder S av n positiva heltal gäller att $|T(S)| \geq n^2 + n - 1$.

Bevis av Lemma 2. Låt e vara det minsta elementet i S och låt E vara det största elementet i S .

Vi hävdar att alla tal på formerna

- (i) $xE + z$, där $x, z \in S$, och
- (ii) $e^2 + z$, där $z \in S \setminus \{E\}$

är parvis distinkta. Att detta är sant kan vi se genom följande falluppdelning:

- Om $x_1E + z_1 = x_2E + z_2$ så får vi att $z_1 = z_2$ genom att betrakta ekvationen modulo E . Därefter får vi direkt att $(x_1, z_1) = (x_2, z_2)$.
- Om $e^2 + z_1 = e^2 + z_2$ så måste $z_1 = z_2$.
- Notera att $e^2 + z_1 < e^2 + E \leq eE + e \leq xE + z_2$ för alla $x, z_2 \in S, z_1 \in S \setminus \{E\}$.

Eftersom det finns n^2 tal på formen (i) och $n - 1$ tal på formen (ii) i $T(S)$ så följer det att $|T(S)| \geq n^2 + n - 1$ för alla mängder S av n positiva heltal. $\square$

Därmed är det minsta antalet olika tal som Alice kan ha skrivit upp på tavlan lika med $n^2 + n - 1$.

Problem 11. Emil har n stenar vars vikter är $1, 2, \dots, n$ kilo. Igår satte han en lapp på varje sten som visade dess vikt, men han är orolig att hans kompis Ivar spelat honom ett spratt och bytt plats på lapparna under natten. Emil vill avgöra om lapparna sitter rätt eller inte genom att göra ett antal vägningar på sin balansvåg. Efter varje vägning får han reda på vilken vågskål som är tyngst, eller att båda väger lika mycket. Kan ni komma på några vägningar Emil kan göra som garanterat avslöjar Ivar om han flyttat på lapparna?

Ni får fler poäng ju färre vägningar er lösning använder för stora n !

Lösningförslag. Som problembeskrivningen antyder så är detta en ganska öppen fråga med fler olika lösningar. Vi visar här en väldigt effektiv lösning som bara kräver

$$2\lceil \log_2(n) \rceil$$

vägningar. Säg att en sten är "bestämd" om Emil vet att lappen som står på den är korrekt.

Börja med att väga $1 + 2$ mot 3 , sedan $1 + 2 + 3$ mot 6 , sedan $1 + 2 + 3 + 6$ mot 12 o.s.v. I varje steg, väg alla stenar som tidigare vägts mot stenen som ska väga lika mycket. Talet på den ensamma stenen fördubblas då efter varje vägning ända tills summan av alla stenar som vägts är större än n . Talet på den sista stenen som vägts blir då $3 \cdot 2^{\lceil \log n/3 \rceil}$. Alla tal på stenarna som hittills vägts, låt oss kalla denna mängd X , kan nu kombineras och ge vilken heltalssumma som helst mellan 1 och $6 \cdot 2^{\lceil \log n/3 \rceil}$ (tänk binära tal fast gånger tre). I synnerhet kan vi välja några stenar från X vars tal summerar till n och väga dessa mot n , så vi gör just det. Sammanlagt har vi nu använt som högst

$$\lceil \log_2\left(\frac{n}{3}\right) \rceil + 1$$

vägningar. Om vid någon av dessa vägningar båda skålarna inte väger lika mycket så vet Emil direkt att lapparna är ombytta. Samma sak gäller hela tiden, så vi antar hädanefter att resultatet av varje vägning är det förväntade. Om sten 1 och 2 båda är märkta rätt så måste alla andra stenar som hittills vägts (Hela X samt n) också vara det. Om 2 och 1 är felmärkta måste de antingen vara ombytta med varandra eller så är deras sammanlagda vikt > 3 , vilket skulle innebära att alla vägda stenar inklusive sten n skulle väga mer än deras märkta tal, vilket ju inte är möjligt. Vi måste dock fortfarande försäkra oss att sten 1 och 2 inte är ombytta, vilket relativt enkelt kan göras på 1 drag. Vi har på så sätt bestämt alla stenar i X samt stenen märkt med n .

Låt nu Y vara mängden stenar som ännu inte är bestämda. Vi visar nu hur alla dessa kan bestämmas på $\lceil \log_2 n \rceil$ drag. Vi utnyttjar det faktum att ett tal är unikt bestämt av dess $\lceil \log_2 n \rceil$ siffror i binärt. För varje heltal $k \leq \lceil \log_2 n \rceil$, låt L_k och U_k beteckna mängden av alla tal i Y vars k :te siffra i binärt är lika med 0 respektive 1 . Resten av algoritmen beskrivs bäst i pseudokod:

```

for  $k = 1, \dots, \lceil \log_2 n \rceil$ : do
  if  $\text{sum}(L_k) < \text{sum}(U_k)$ : then
    lägg hela  $L_k$  vid vågskål 1
    while summan av stenarna vid vågskål 1 är större än de vid vågskål 2: do
      lägg en sten från  $U_k$  vid vågskål 2. Börja med den med högst tal.
    end while
    Låt  $D$  vara hur mycket mer stenarna vid vågskål 2 väger än stenarna vid vågskål 1 om alla etiketter är rätta. Obs:  $D < n$ .
    Välj stenar från  $X$  som tillsammans väger  $D$  och lägg vid vågskål 1.
    Utför vägningen!
  else
    lägg hela  $U_k$  vid vågskål 2
    while summan av stenarna vid vågskål 2 är större än de vid vågskål 1: do
      lägg en sten från  $L_k$  vid vågskål 1. Börja med den med lägst tal.
    end while
    Låt  $D$  vara hur mycket mer stenarna vid vågskål 1 väger än stenarna vid vågskål 2 om alla etiketter är rätta. Obs:  $D < n$ .
    Välj stenar från  $X$  som tillsammans väger  $D$  och lägg vid vågskål 2.
    Utför vägningen!
  end if
end for

```

Påståande: Efter k iterationer av denna algoritm har Emil bestämt de första k binära siffrorna av alla stenars vikt.

Bevis av påstående: Per induktion, anta att Emil känner till de första $k - 1$ binära siffrorna av alla stenar. I iteration k är då stenarna i vågskål 1 sammanlagt så lätta som de kan vara om de är märkta rätt. På samma sätt är stenarna i vågskål 2 så tunga de kan vara om de är märkta rätt. Om stenarna i vågskål 1 och 2 inte är de som Emil tror ligger där så skulle alltså vågskål 1 väga mer än vågskål 2.

Om båda skålarna väger lika mycket, vilket de borde göra om alla stenar är rätt markerade, så vet alltså Emil vilka stenar som ligger i båda vågskålarna. I fall 1 innebär detta i synnerhet att han vet vilka som är i L_k och i fall 2 innebär detta att han vet vilka som är i U_k . I vilket fall vet alltså Emil exakt vilka stenar i Y som är i L_k och vilka som är i U_k , vilket bevisar påståendet. $\square$

Efter k iterationer vet alltså Emil de k första binära siffrorna av alla stenars vikter och han kan därmed försäkra sig att alla stenar väger så mycket som deras etikett visar. Totalt användes

$$\begin{aligned} & \lceil \log_2\left(\frac{n}{3}\right) \rceil + 1 + \lceil \log_2(n) \rceil \\ & \leq 2\lceil \log_2(n) \rceil \end{aligned}$$

vägningar.

Anmärkning: Detta är inte en optimal lösning, men det går i alla fall inte att lösa problemet med färre än $\lceil \log_3(n) \rceil$ vägningar. Anledningen är att varje vägning endast grupperar stenarna i tre delar: de i vågskål 1, de i vågskål 2 samt de utanför. För att säkerställa att inga två lapparna är ombytta måste varje par av stenar vid någon vägning placeras i olika grupper och detta kräver just $\lceil \log_3(n) \rceil$ vägningar. Lösningen ovan har alltså optimal tidskomplexitet.