

Gymnasietävling den 15 maj 2025

Skrivtid: 3 timmar

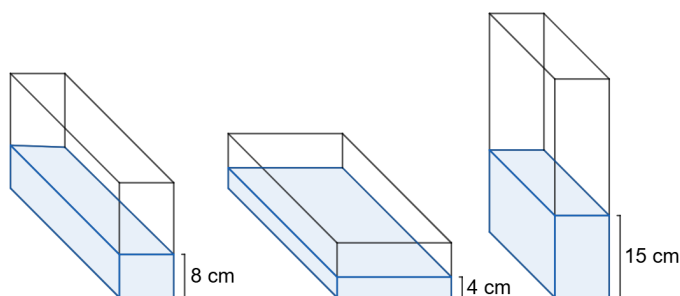
Hjälpmedel: endast penna, sudd, passare och linjal

Varje problem är värt 7 poäng.

För full poäng krävs motivering om inget annat anges.

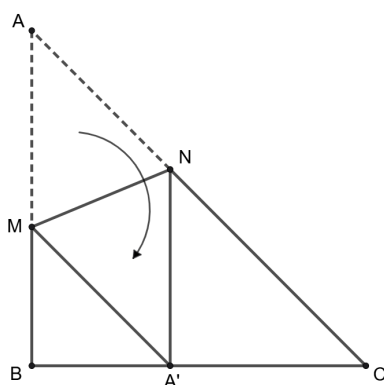
Problem 1. Sofia har en balansvåg samt nio vikter som väger 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, respektive 1410 gram. Hur kan hon balansera dessa vikter på vågen utan att det blir några över? Endast svar krävs.

Problem 2. Cecilia häller tre liter vatten i en rektangulär glasbehållare med lock. När hon lägger den på ett bord blir vattennivån 8 cm, 4 cm eller 15 cm beroende på hur hon roterar den. Vad är behållarens volym?



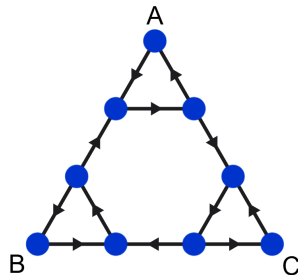
Problem 3. Ett palindromtal är ett tal som är likadant baklänges som framlänges, till exempel 494. Om du multiplicerar ihop alla tresiffriga palindromtal, hur många nollor slutar produkten på?

Problem 4. Theodor gör en triangel genom att halvera ett $1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm}$ kvadratisk pappersark längs diagonalen. Han viker sedan över hörnet A till punkten A' så att vecket MN bildas (där M och N ligger på AB respektive AC) och så att $A'N$ blir vinkelrät mot BC . I vilket förhållande delar A' sträckan BC ?



Problem 5. En groda befinner sig i punkten med koordinater $(0,0)$ i planet och börjar hoppa. Grodan gör först ett hopp av längd 1 och hoppar sedan dubbelt så långt för varje hopp. Alla hopp görs parallellt med någon av koordinataxlarna. Vilka punkter kan grodan nå genom att hoppa på detta sätt?

Problem 6. I ett triviaspel ser spelplanen ut som i figuren nedan. Tre spelare, A, B, och C börjar i varsitt hörn på planen. I varje runda går de sedan ett steg längs med en pil. De får bara gå i den riktning som pilen pekar. I slutet har alla spelare gått 20 steg. Bevisa att alla spelare slutar på olika rutor.



Problem 7. Fibonaccitalen $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ är talföljden man får om man börjar med två ettor och sedan beräknar nästa tal genom att addera de två föregående talen med varandra.

- Skriv heltalen $1, 2, 3, 4, \dots, 20, 21$ i en cirkel i någon ordning så att skillnaden mellan två tal bredvid varandra alltid är antingen 8 eller 13.
- Låt a , b och n vara tre på varandra följande Fibonaccital. Bevisa att det alltid går att skriva talen $1, 2, \dots, n$ i en cirkel så att skillnaden mellan två tal bredvid varandra alltid är antingen a eller b .

Problem 8. Talet $n = 10^9 + 7$ är ett primtal. Talen $1, 2, 3, \dots, n$ placeras på en cirkel i den ordningen (1 är bredvid n). Det dras en rät linje som separerar talen i två grupper. Båda grupperna har samma summa. Visa att det bara finns en möjlig sådan uppdelning och hitta den.

Problem 9. Fem punkter A, B, C, D och E ligger på en cirkel i den ordningen så att $|BA| = |BC|$, $|DA| = |DE|$ och $|BD| = |CE|$. Bevisa att $\angle BAD = 60^\circ$.

Problem 10. Låt n vara ett positivt heltal. Alice får en påse med n olika positiva heltal och skriver upp alla möjliga tal på formen $xy + z$ på en tavla, där x, y och z är (inte nödvändigtvis olika) tal från påsen. Givet n , bestäm det minsta antal *olika* tal som Alice måste ha skrivit upp på tavlan, oberoende av vilka tal som fanns i påsen.

Problem 11. Emil har n stenar vars vikter är $1, 2, \dots, n$ kilo. Igår satte han en lapp på varje sten som visade dess vikt, men han är orolig att hans kompis Ivar spelat honom ett spratt och bytt plats på lapparna under natten. Emil vill avgöra om lapparna sitter rätt eller inte genom att göra ett antal vägningar på sin balansvåg. Efter varje vägning får han reda på vilken vågskål som är tyngst, eller att båda väger lika mycket. Kan ni komma på några vägningar Emil kan göra som garanterat avslöjar Ivar om han flyttat på lapparna?

Ni får fler poäng ju färre vägningar er lösning använder för stora n !