Problemlösning

Linköpingslägret 2015

12 December 2015

Uppgifterna är INTE i svårighetsordning och svårighetsgraden är väldigt varierande. * betyder generellt sett att uppgiften är svår eller innehåller ett begrepp som inte används i så många andra uppgifter. Om det står (T) efter uppgiftsnumret har uppgiften ett tips. Observera dock att man lär sig ytterst lite av att kolla på tipset direkt. Försök 10-15 minuter och har du inte kommit någon vart på uppgiften då så kolla på tipset.

Försök att tänka på om du kan använda någon av problemlösningsstrategierna som det pratades om under föreläsningarna. Några av dessa var:

- Fixa till problemet! Gör det snyggare, enklare eller annorlunda - allt för att få en bättre bild över hur vi ska lösa problemet.
- Hitta den svaga punkten i problemet. Den svaga punkten går ofta att hitta i problemformuleringen och kan t.ex. vara att vi jobbar med heltal, att det är liksidig/likbent/rätvinklig triangel, etc.
- Tänk utanför boxen - allt som oftast fungerar inte våra standardmetoder och vi måste vara kreativa istället när vi löser problemet.
- Invarians, extremprincipen, induktion, falluppdelning, etc.
- Gör motsatsen av vad problemet säger alternativt börja från slutet.

1 Algebra

1. * Låt a_n vara en sekvens som ges av $a_0 = a_1 = 5$,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{98}$$

Visa att

$$\frac{a_n + 1}{6}$$

är ett heltal för alla n.

2. *(T) Låt p(x) vara ett polynom med heltalskoefficienter. Om p(3)=2, kan då p(2003) vara ett kvadrattal?

3. Låt p(x) vara ett polynom med heltalskoefficienter. Visa att om p(2)=3 och p(3)=5 så har ekvationen p(x)=0 inga heltalslösningar.

4. (T) Visa att
$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$
för alla n.

5. (T) Visa att
$$\frac{1}{9}(10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5)$$
är ett heltal för alla n.

6. Låt a_i vara en aritmetisk talföljd med differensen d mellan två tal i följden. Visa att S_i som ges av:
$$S_1 = a_1 + a_2 + ...a_n S_2 = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n}...$$
också är en aritmetisk talföljd samt bestäm differensen.

7. Två aritmetiska talföljder, a_i och b_i, börjar med $1, 4, ...$ respektive $9, 16, ...$ Hur många av de 2015 första talen i b_i finns även med bland de 2015 första talen i a_i?

8. En ökande följd av positiva heltal $a_1, a_2, ...$ har egenskapen att
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$
Vad är a_8 om $a_7 = 120$?

9. * En följd $\{a_i\}_{i>0}$ av heltal uppfyller
$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \text{för alla } n \geq 3.$$
Vad blir summan av de 2015 första talen om summan av de 1492 första är 1985 och summan av de 1985 första är 1492?

10. * En ökande följd av tal består av alla positiva heltal som är potenser av 3 eller summan av olika potenser av 3. De första talen är alltså
$$1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ...$$
Vilket är det hundrade talet?

2 Geometri

1. Konstruera en polygon så att från en punkt i polygonens inre ser man inte någon sida helt.

2. Låt P vara en punkt på den omskrivna cirkeln till rektangeln ABCD. Låt X, Y, Z och W vara (den ortogonala) projektionen av P på AB, BC, CD och DA. Visa att X, Y, Z resp W är ortocentrum (höjdernas skärningspunkt) till triangeln som utgörs av de övriga tre.

3. (a) Visa att en kvadrat kan bli uppdelad i n mindre kvadrater för alla $n \geq 6$.

   (b) * Visa att det inte går för $n = 5$.

4. Tre bollar med radie 4 ligger på ett plant bord. Ovanpå dessa placeras en boll med radie 8. Vad är avståndet från den punkt på den övre sfären som är längst ifrån bordet till bordet? (Anm. alla bollar är givetvis perfekta sfärer!)

5. (Napoleons sats) Låt ABC vara en triangel. Låt A' vara sådan att A' och A ligger på olika sidor av BC och A'BC är liksidig. Låt A" vara centrum för A'BC. Definiera B', B", C' och C" på motsvarande sätt. Visa att A"B"C" är liksidig.

6. Låt ABCD vara en cyklisk fyrhörning och dra fyra cirklar där AB, BC, CD resp. DA är en korda i vars en. Visa att de fyra nya skärningspunkterna är koncykliska.

7. Låt H vara ortocentrum i triangeln ABC. Visa att speglingarna av H i AB, BC och CA ligger på den till triangeln ABC omskrivna cirkeln.

8. Låt ABCD vara en konvex fyrhörning så att diagonalerna AC och BD är ortogonala mot varandra och kalla skärningspunkten mellan AC och BD för P. Visa att speglingarna av P i linjerna AB, BC, CD och DA ligger på en cirkel.

9. Låt ABCD vara en cyklisk fyrhörning och låt I_A, I_B, I_C och I_D vara incentrum för trianglarna BCD, CDA, DAB respektive ABC. Visa att $I_A I_B I_C I_D$ är en rektangel.

10. * (Kombinatorisk geometri) Visa att för alla $2n$ punkter inuti en konvex polygon kan man göra en uppdelning av polygonen till $n + 1$ konvexa polygoner för alla n.

3 Kombinatorik

1. (T)* Det finns 13 röda, 15 gröna och 17 blå kameleonter på en ö. När två kameleonter av olika färg möts byter de båda färg till den tredje färgen. Kan alla kameleonter bli samma färg?

2. Ett $8x8$-bräde är från början schackrutigt. Man kan måla om en hel rad eller kolumn. Kan det bli en svart ruta och resten vita?

3. Kan ett $10x10$-bräde fyllas med 25 stycken T-formade bitar som består av 4 bitar vardera?

4. I varje cell av ett rektangulärt bräde står en siffra. I varje drag kan man antingen multiplicera alla tal i en rad med 2 eller subtrahera 1 från alla tal i en kolumn. Visa att man kan få 0 i alla celler till slut.

5. Runt ett bord sitter 25 killar och 25 tjejer. Visa att det alltid finns någon person som sitter bredvid 2 tjejer.

6. * Hitta antalet lösningar (x_1, x_2, x_3, x_4) till ekvationen
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20.$$

7. Visa att om man har sju olika positiva heltal vars summa är 100 så är summan av de tre största talen minst 50.

8. Är det möjligt att flytta en schackhäst på ett $5x5$-bräde så att den börjar och slutar på samma ruta och passerar alla rutorna på brädet?

9. (T)* Visa att vi inte kan fylla ett $4x11$-bräde med 11 stycken L-formade bitar(varje L-formad bit består av 4 enhetskvadrater och ser ut som ett L.)

10. * Vi börjar med tre heltal skrivna på en tavla. I varje drag kan ett av talen, säg c, ersättas med $2a + 2b - c$ där a och b är de andra två talen. Kan vi få trippeln $11, 12, 13$ om vi börjar med $20, 21, 24$?

4 Talteori

1. Visa att för alla heltal $n \geq 3$ har ekvationen
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 1$$
en lösning för distinkta positiva heltal $x_1, x_2, ..., x_n$.

2. Visa att $n^3 < n!$ för alla heltal $n \geq 6$.

3. Hitta alla positiva heltal m och n så att $lcm(m, n, 2012) = mn - 2012$.

4. (T)* Visa att produkten av fyra på varandra följande positiva heltal inte kan vara en kvadrat.

5. Visa att det för alla n gäller att

$$11...1 = 22...2 + (33...3)^2,$$

då det är $2n$ 1or och n 2or och 3or.

6. Visa att för alla primtal $p \geq 7$ är talet 11...1, som innehåller $p-1$ ettor, delbart med p.

7. *Hitta alla a så att

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor = a.$$

8. Låt a_n och b_n vara två sekvenser av tal som definieras av

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n = 0, 1, ..., a_0 = 1, a_1 = 2,$$
$$b_{n+2} = b_{n+1} + b_n, n = 0, 1, ..., b_0 = 1, b_1 = 2.$$

Hur många heltal har följderna gemensamt?

9. *Visa att ekvationen $m^3 + n^4 = 7$ saknar heltalslösningar.

10. (T) Hitta alla heltalspar (m, n) så att $3^m - 2^n = 7$.

5 Tips

A2. Vad betyder det att p(x) har heltalskoefficienter? Vad ger det oss?

A4. Induktion.

A5. Induktion.

K1. Hitta invariansen!

K9. Färglägg brädet smart!

T4. Finns det något tal väldigt nära produkten av fyra på varandra följande tal som faktiskt är en kvadrat?

T10. Kolla modulo någon bra tvåpotens.