Tävling SMT 2

13 december 2015

1. Hitta alla a sådana att ekvationen
$$a3^x + 3^{-x} = 3$$
endast har en lösning.

2. Givet ett polynom $P(x)$ med reella koefficienter, visa att om $P(x) = P(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, så är $P(x) = F(x^2)$ för något polynom F med reella koefficienter.

3. Låt $\mathbb{R}$ beteckna mängden av alla reella tal. Hitta alla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så att
$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y),$$
för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Visa att för alla $x \in \mathbb{R}$ är
$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x \leq 1.$$

5. Låt $\{a_n\}_{n\geq 1}$ vara en följd med $a_1 = 1$ och
$$a_{n+1} = \left\lfloor a_n + \sqrt{a_n} + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$
för alla $n \geq 1$, där $\lfloor x \rfloor$ betecknar det största heltalet mindre än eller lika med x. Bestäm alla $n \leq 2013$ sådana att a_n är en jämn kvadrat.

6. Visa att $[ABC] = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$, där [P] står för arean för en figur P, r är radien för den inskrivna cirkeln och r_a, r_b och r_c står för radien i de vidskrivna cirklarna.

7. $ABCDE$ är en regelbunden femhörning. Vad är $\frac{AB}{AC}$?

8. Låt $\triangle ABC$ med incentrum I och I_A centrum för den vidskrivna cirkeln som tangerar BC. Visa att $BICI_A$ är cyklisk och att cirkelns medelpunkt ligger på den omskrivna cirkeln till $\triangle ABC$.

9. Antag att linjerna B_1C_1 och B_2C_2 skär varandra i en punkt A. Bevisa att $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$ om och endast om $B_1C_1B_2C_2$ är cyklisk.

10. Punkten P ligger i den spetsiga vinkeln BAC. Dra höjderna PC_1 och PB_1 till linjerna AB respektive AC. Visa att $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

11. Låt S vara en delmängd av mängden $\{1, 2, 3, ..., 2016\}$ som består av 760 element. Visa att det finns $a, b \in S$ sådana att $a + b$ är delbart med 8.

12. I ett plan finns fem punkter sådana att inga tre är ligger på en linje. Visa att fyra av dessa utgör en konvex fyrhörning.

13. En delmängd ur mängden $\{1, 2, 3, ..., 50\}$ kallas *speciell* om den inte innehåller både n och $3n$ för något $n \geq 1$. En speciell delmängd som dessutom innehåller det maximala antalet element den kan och fortfarande är speciell kallas *superspeciell*. Hur många element innehåller en superspeciell delmängd och hur många superspeciella delmängder finns det?

14. Under en fotbollssäsong spelar $2n, n \geq 1$ lag mot alla andra lag exakt en gång. Visa att det går att dela upp dessa matcher i $2n - 1$ omgångar så att varje lag spelar exakt 1 match varje omgång.

15. På varje ruta av ett schackbräde (8x8) placeras en pjäs som är antingen röd, blå eller vit. Man behöver inte använda alla färgerna och man kan ha obegränsat antal av varje. Finns det flest sätt att sätta upp pjäserna så att det finns ett jämnt antal röda pjäser eller så att det finns ett udda antal?

16. Bestäm alla primtal p så att $16p + 1$ är en heltalskub.

17. Hitta det minsta positiva n så att oavsett hur man skriver $10n = a \cdot b$ så innehåller någon av a och b en nolla.

18. Hitta det minsta n så att 2^{2000} delar $2003^n - 1$.

19. Hitta alla k, l, m, n så att $3^k 5^l + 7^m = 2^n$.

20. Visa att för alla $a, b \in \mathbb{R}$ är

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor 2a \rfloor + \lfloor 2b \rfloor.$$