Tävling SMT 1

13 december 2015

1. Funktionen $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ uppfyller att $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(10) = 14$ och $f(40) = 20$. Vad är $f(500)$?

2. Låt F_n vara Fibonaccitalen så att $F_1 = F_2 = 1$. Visa att $4(-1)^n + 5F_n^2$ är en kvadrat för alla n.

3. För varje positivt heltal $k > 1$, låt en talföljd $\{a_n\}_{n\geq 0}$ vara definierad genom
$$a_0 = 1, \text{ samt } a_{n+1} = kn + (-1)^n a_n \text{ då } n \geq 0.$$
Bestäm alla värden k för vilka 2000 är en term i följden.

4. Hitta alla positiva reella lösningar till ekvationen
$$x + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor,$$
där $\lfloor t \rfloor$ betecknar det största heltalet mindre än eller lika med t.

5. Hitta alla reella a, b, c, d som löser ekvationssystemet
$$\begin{cases} ab + c + d = 3 \\ bc + d + a = 5 \\ cd + a + b = 2 \\ da + b + c = 6. \end{cases}$$

6. Låt ABC vara en triangel och D, E och F vara punkter på sidan BC, CA och AB, respektive. Visa att de omskrivna cirklarna till trianglarna AEF, BFD och CDE har en gemensam punkt.

7. Låt ABC vara en triangel med incentrum I och omcentrum O. Hitta vinklarna i triangeln givet att O och I är symmetriska kring BC.

8. Visa att om medianerna AA_1 och BB_1 i triangeln ABC är vinkelräta mot varandra så är $a^2 + b^2 = 5c^2$, där a, b, och c är sidorna motstående A, B resp. C.

9. Låt D vara en punkt på sidan BC i den liksidiga triangeln ABC. Visa att radierna till de omskrivna cirklarna till ABD och ACD är lika. Är det nödvändigt att triangeln är liksidig?

10. Låt $ABCD$ vara en fyrhörning och E, F, G, H, I, J vara mittpunkterna på AB, BC, CD, DA, AC, BD. Visa att EG, FH och IJ skär varandra i en punkt.

11. 12 personer sitter runt ett bord. På hur många sätt kan det ske 6 handskakningar samtidigt (varje person ingår i exakt en handskakning) så att inga armar korsar varandra?

12. Låt m och n vara heltal större än 1. På ett bräde av storleken $m \times n$ sätts k st svarta rutor ut så att inga tre svarta rutor är hörn i en rätvinklig triangel med två sidor parallella med brädets sidor. Hitta det största möjliga k.

13. Hitta det största heltalet t så att talen $1, 2, \ldots, n$ kan placeras i en rad så att varje två på varandra följande termer skiljer sig med minst t.

14. Betrakta följande spel för två personer. Ursprungligen ligger k stenar på ett bord. Spelarna turas om att ta bort n^2 stycken stenar där n är ett positivt heltal. Den som tar bort den sista stenen vinner. Visa att det finns oändligt många k för vilka spelare 2 vinner oavsett vad spelare 1 gör.

15. Sju punkter varav inga tre ligger på en linje finns i planet. Mellan varje par av punkter ritas en linje som målas antingen blå eller röd. Visa att det finns minst fyra monokromatiska(enfärgade) trianglar.

16. Vilket är det minsta positiva heltalet som har 6 udda positiva delare och 12 jämna positiva delare?

17. Visa att om n delar $7^n - 3^n$ så är n jämnt.

18. Hitta alla heltal x, y och primtal p så att $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{p}$.

19. Hitta alla heltal x, y så att $x^2 + y^2 = 3^{2014}$.

20. Hitta alla heltal x, y, z så att $x^4 + y^4 + z^4 = 2^{100}$.