Tävling NMC

13 dec 2015

1. För funktionen f gäller

$$f(x) = f(398 - x) = f(2158 - x) = f(3214 - x)$$

för alla reella x. Hur många distinkta värden kan$\{f(0), f(1), f(2), ...f(999)\}$ anta?

2. Visa att $3^{\frac{1}{3}}$ inte kan vara en rot till ett andragradspolynom med rationella koefficienter.

3. Låt a, b, c vara sidorna i en triangel. Visa att om $x^2+(a+1)x+b-c = 0$ har heltalslösningar så är triangeln likbent.

4. Hitta alla polynom $P(x)$ med reella koefficienter så att $2P(2x) = P(3x) + P(x)$.

5. För funktionen $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ är $f(1) = 1$ och $nf(2n + 1) = (2n + 1)(f(n) + n)$ för alla $n \geq 1$. Visa att $f(n)$ alltid är ett heltal och för hur många heltal mindre än 2015 är $f(n) = 2n$?

6. I en öken(som visserligen har exakt 2 vinkelräta motorvägar) står en terrängbil i korsningen mellan de två vinkelräta motorvägarna. På motorvägen kan bilen köra i 50km/h och utanför i sanden kan den köra i 14km/h. Hur stor area kan bilen komma till på mindre än 6 minuter? Uttryck detta i km^2.

7. En hög med $2n$ kort är talen 1 t.o.m. $2n$ skrivna. Korten läggs sedan ut i en slumpmässig rad på ett bord. Därefter väljer Adam och Bertil alternerande ett kort från någon av ändarna. Adam får börja. Visa att Adams summa alltid kan vara minst lika stor som Bertils när alla kort är tagna, om det spelas optimalt.

8. I en 5×5-kvadrat skrivs en av sifforna $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i varje enhetscell så att det finns exakt en av varje siffra i varje rad, kolumn och diagonal. Varje sådan uppställning tilldelas en poäng som ges av summan av de fyra siffrorna som står i rutorna precis under en av diagonalerna. Vad är den maximala poängen en uppställning kan ha?

9. James ska spela ett (enmans)spel. Från början finns det 100 (identiska) kulor på ett bord och två skålar - en röd och en blå. James ska sedan göra drag. Ett drag består av att man antingen lägger en kula i en av skålarna eller plockar ut en kula ur en av skålarna. Det finns dock två regler som inte får brytas:

   (a) det får inte finnas fler kulor i den blå skålen än i den röda,

   (b) spelet får inte återgå till en position som det redan varit i.

   Hur många drag kan James maximalt göra?

10. Vi har $n \geq 2$ lampor $L_1, ..., L_n$ i en rad som är antingen på eller av. Varje sekund ändrar vi samtidigt lampornas tillstånd enligt följande regel:

    Om lampa L_i och dess grannar (endast en granne för $i = 1$ eller $i = n$) har samma tillstånd så släcks L_i, annars tänds L_i.

    Ursprungligen är alla lampor släckta utom L_1 som är tänd.

    (a) Bevisa att det finns oändligt många heltal n för vilka alla lampor till slut kommer att vara släckta.

    (b) Bevisa att det finns oändligt många heltal n för vilka alla lampor aldrig kommer att vara släckta samtidigt.

11. Låt $ABCD$ vara en cyklisk fyrhörning. Låt l_A vara bisektrisen av vinkeln A och låt l_B, l_C, och l_D definieras på samma sätt. Låt E vara skärningen mellan l_A och l_B, F mellan l_B och l_C, G mellan l_C och l_D samt H mellan l_D och l_A. Visa att $EFGH$ är cyklisk.

12. Låt P vara skärningen mellan diagonalerna i den konvexa fyrhörningen $ABCD$. Visa att om AC är vinkelrät mot BD så kommer reflektionerna av P i AB, BC, CD och DA att ligga på en cirkel.

13. Låt ω_1 vara en fixerad cirkel och låt A och B vara två punkter på ω_1 så att AB inte är diameter. Låt ω_2 och ω_3 vara två mindre varierbara cirklar som tangerar ω_1 i A resp. B och låt skärningarna mellan ω_2 och ω_3 vara C och D. Visa att oavsett valet av ω_2, ω_3 så går CD genom en fix punkt.

14. Låt C_1 och C_2 vara två cirklar som tangerar varandra invertes i A. Låt kordan BC i C_1 skära C_2 i P och Q. Visa att vinklarna BAP och CAQ är lika.

15. Låt ω_1 och ω_2 vara två cirklar av olika storlek som skär varandra i X och Y. Antag att de gemensamma tangenterna skär varandra i S och att den ena tangenten tangerar ω_1 i T_1 och ω_2 i T_2. Visa att $SX^2 = ST_1 \cdot ST_2$.

16. Hitta alla primtal p, q så att pq delar $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

17. Hitta det minsta positiva heltalet a så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^3 + y^3 + z^2 = a \end{cases}$$

saknar heltalslösning.

18. Hitta alla lösningar där a, b, c är positiva heltal till $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$.

19. Visa att det finns oändligt många primtal p så att det finns ett primtal $q < p$ så att p delar $(q-1)! + 1$.

20. Hitta alla n så att $n+2008$ delar $n+2008^2$ och $n+2009$ delar $n+2009^2$.