Tävling IMO

13 dec 2015

1. Låt $f(x) = ax^2 + bx + c$ vara ett andragradspolynom med heltalskoefficienter så att för varje heltal n finns ett c_n så att n delar $f(c_n)$. Visa att f har rationella nollställen.

2. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara rötterna till $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 = 0$. Vad blir $\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} + ... + \frac{1}{x_n-1}$?

3. Låt a_n, $n \geq 0$, vara en sekvens av reella tal så att $a_{n+1} \geq a_n^2 + \frac{1}{5}$. Visa att $\sqrt{a_{n+5}} \geq a_{n-5}^2$ för alla $n \geq 5$.

4. Visa att $ax^2+(b+d)x+c = 0$, $bx^2+(c+d)x+a = 0$ och $cx^2+(a+d)x+b = 0$ har en gemensam rot om och endast om $a + b + c + d = 0$.

5. Hitta alla rationella tal a_0 sådana att det i talföljden som ges av

   $$a_{n+1} = 2a_n^2 + 1, \text{ för alla } n \geq 0$$

   existerar några $i \neq j$ så att $a_i = a_j$.

6. Vi har en hög med 2000 kort (med siffrorna 1 tom 2000) på ett bord. Först tar vi det översta kortet i högen och lägger det på bordet. Nästa kort lägger vi underst i högen. Efter det tar vi nästa översta kort och lägger till höger om kortet på bordet, nästa lägger vi underst osv. När vi har gjort detta visar det sig att siffrorna på korten på bordet är i från vänster sett ökande ordning. Hur många kort låg från början över kortet med siffran 1999?

7. Låt T vara en mängd av 2005 punkter i ett plan så att inga tre ligger på en linje. Visa att varje av de 2005 punkterna ligger i ett jämnt antal trianglar vars hörn är i några av de övriga 2004 punkterna.

8. Personerna A och B ska spela ett spel. Ursprungligen är det en oändligt stor spelplan där varje ruta är en regelbunden 6-hörning. A börjar och väljer två intilliggande tomma rutor och placerar en spelpjäs i varje av dessa två rutor. Därefter får person B ta bort en pjäs. Sedan fortsätter de på samma sätt. Om det någon gång finns k pjäser i rad (utan tomma rutor emellan, men vägen kan snirkla sig) så vinner person A. Hitta det minsta k sådant att A inte kan vinna i ett ändligt antal drag eller bevisa att det inte existerar något sådant k.

9. En permutation av mängden av positiva heltal $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ är en följd $(a_1, a_2, ..., a_n)$ så att varje element i $[n]$ uppkommer exakt en gång som en term i följden. Låt $P(n)$ vara antalet permutationer av n, för vilken ka_k är en perfekt kvadrat för alla $1 \leq k \leq n$. Hitta det minsta n så att $P(n)$ är en multipel av 2010.

10. Att klippa en konvex n-hörning innebär att man väljer ett par av intilliggande sidor, AB och BC, och byter ut dem mot tre segment, AM, MN och NC, där M är mittpunkten på AB och N är mittpunkten på BC. En regelbunden sexhörning, P_6 med area 1 klipps så att man får en sjuhörning, P_7. Sedan klipps P_7 så att man får en åttahörning, P_8, osv. Visa att oavsett hur man klipper så kommer arean av P_n att vara större än $\frac{1}{3}$.

11. Låt P vara skärningen mellan diagonalerna i den konvexa fyrhörningen $ABCD$. Visa att om AC är vinkelrät mot BD så ligger reflektionerna av P i AB, BC, CD och DA att ligga på en cirkel.

12. På förlängningen (utanför cirkeln) av en korda KL i en cirkel med medelpunkt O väljs en punkt A. Låt AP och AQ vara tangenter till cirkeln och låt M vara mittpunkten på PQ. Visa att vinklarna MKO och MLO är lika.

13. Låt ω vara en cirkel och P en punkt utanför cirkeln. Tangenterna till ω genom P tangerar ω i A och B. Den till PB parallella linjen genom A skär ω i C och PC skär ω i E. AE och OB skär varandra i K. Visa att $KB = OK$.

14. Låt B' och C' vara höjdernas fotpunkter från B resp. C i triangeln ABC. Låt M vara mittpunkten på BC, H vara ortocentrum i ABC och D vara skärningen mellan BC och $B'C'$. Visa att DH är ortogonal mot AM.

15. Låt ABC vara en triangel, D vara punkten man får om man speglar skärningspunkten mellan medianerna i mittpunkten av AB och låt E vara punkten man får om man speglar C i B. Visa att A, D och E ligger på en linje.

16. Visa först att varje positivt heltal har en unik faktorialframställning dvs. $f_1, f_2, ..., f_m$ är entydigt bestämda för varje positivt $n = 1! \cdot f_1 + 2! \cdot f_2 + ... + m! \cdot f_m$, där $0 \leq f_i \leq i$ för alla $i \leq m$. Hitta sedan $f_1 - f_2 + f_3 - ... + (-1)^{j+1} f_j$, då $(f_1, f_2, \ldots, f_j)$ är faktorialframställningen för $16! - 32! + 48! - ... - 1984! + 2000!$.

17. Låt $S(n)$ vara summan av siffrorna i talet n. Visa att $\frac{S(8n)}{S(n)} \geq \frac{1}{8}$.

18. Visa att $x^2 + 2y^2 + 98z^2 = 77...7$ (2005 st 7:or) inte har några heltalslösningar.

19. Hitta alla a, b, c så att $\frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{2}$ är en heltalskvadrat.

20. Visa att $x^5 - y^2 = 4$ saknar heltalslösningar.