Anteckningar propp SMT2

Lars Åström

11 december 2015

Under proppen ska följande gås igenom:

- Induktion - dominoeffekten
- Falluppdelning
- Extremprincipen
- Invarians
- Andra knep som används

Induktion

Vi använder oss av induktion(svag) då vi vill visa ett påstående, P, och består följande av tre steg:

1. Vi visar ett (eller flera) grundfall, $P(0)$
2. Vi antar att för något k gäller $P(k)$
3. Vi visar att om $P(k)$ gäller så måste även $P(k+1)$ gälla.

Induktion används för att visa många påståenden på en gång. Induktion kan jämföras med dominoeffekten, om bara den första brickan faller ($P(0)$ gäller) så faller även resten av brickorna.

Exempel 1. Visa att $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Lösning:

1. Då $n = 0$ är både H.L. och V.L. 0.
2. Antag att $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.
3. Men nu gäller att $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = (k+1)^3 + \sum_{i=1}^{k} i^3 = k^3+3k^2+3k+1+\frac{p^4+2p^3+p^2}{4} = \frac{p^4+6p^3+13p^2+12p+4}{4} = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$, vilket var vad vi ville visa.

Enligt induktionsprincipen gäller alltså $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ för alla n.

Uppgifter

1. Visa att $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ för alla positiva heltal n.
2. Visa att $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ för alla positiva heltal n.
3. Visa att $k^3 + 2k$ är jämnt delbart med 3 för alla k.
4. Visa att $3^n > n^2$ för alla positiva n.
5. Visa att $n! > 2^n$ för alla heltal $n \geq 4$. (Tips: Vad är $P(0)$ nu?)
6. Visa att $8^n - 1$ är jämnt delbart med 7 för alla positiva n.

Anm. det finns också något som kallas stark induktion. Skillnaden mellan stark och svag induktion finns i punkt 2. I svag induktion antar vi att $P(k)$ gäller medan vi i stark induktion antar att $P(m)$ gäller för alla $m \leq k$. Vilket som passar bäst beror på situationen.

Falluppdelning

Många tävlingsproblem är för svåra för att lösa helt på en gång och att dela upp i mindre fall förenklar ofta processen. Till exempel kan man först betrakta udda och sedan jämna tal, man kan först anta att ett tal är störst och sedan att ett annat är störst osv.

Exempel 2. (NMC 2015) Låt p, q och r vara primtal sådana att mellan talen pqr och $p + q + r$ skiljer en faktor 101. Hitta alla sådana tripplar av tal.

Lösning: Vi delar upp detta i två huvudfall:

1. $101pqr = p + q + r$
2. $pqr = 101(p + q + r)$

1. Antag att p är det största (eller ett av de största) talen. Då får vi att $101pqr = p+q+r \leq 3p$, vilket innebär att $101qr \leq 3$, vilket leder till motsägelse. Alltså finns ingen lösning.

2. Eftersom 101 är ett primtal och delar pqr och p, q och r är primtal så måste ett av p, q och r vara lika med 101. Antag att $p = 101$. Nu får vi att qr=101+q+r
$\Leftrightarrow$ (q-1)(r-1)=102
Alltså måste talen $q - 1$ och $r - 1$ vara (1,102), (2,51), (3,34) eller (6,17). Av dessa är det endast (1,102) som gör att q och r är primtal. På samma sätt fås

samma lösningar om $q = 101$ eller $r = 101$. Alla lösningar är alltså (2,101,103) samt alla permutationer av dessa tal.

Uppgifter

1. Hitta alla lösningar till $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{101}$, där x och y är positiva heltal.

2. Hitta alla heltal m och n samt primtal p så att $p^n = (m-1)(m^2+m+1)$

Extremprincipen

Ofta är den svaga punkten för ett problem det mest extrema (största, minsta, etc.) fallet. Att studera det extrema fallet är extremprincipen och det kan även vara att vi antar att två tal inte har några gemensamma faktorer(dvs. att de är relativt prima), etc.

Exempel 3. Ett udda antal barn har vars en vattenpistol och är utspridda på en stor gräsmatta. Alla avstånden mellan barnen är olika och barnen skjuter på det barn som är närmst dem. Visa att något barn kommer vara torrt efter att alla har skjutit exakt en gång var.
Lösning: Vi kollar på de barnen som är närmst varandra. De kommer att skjuta på varandra. Om något annat barn också skjuter på dem kommer vi garanterat ha ett torrt barn, om inte så betraktar vi endast övriga barn. Sedan kollar vi på de som är närmst varandra av barnen vi kollar på, osv. Till slut kommer vi ha ett barn kvar, som blir torrt.

Uppgifter

1. Placera talen $1, 2, ..., n^2$ på ett kvadratiskt bräde. Visa att det finns två tal som har ett gemensamt hörn sådana att differensen mellan dem är minst $n + 1$.

2. Ett antal svarta och vita punkter finns i ett plan. Visa att om det finns (minst) en vit punkt mellan alla par av svarta punkter och (minst) en svart punkt mellan alla par av vita punkter så måste alla punkterna ligga på en linje.

3. Hitta alla heltal x och y sådana att $3x^2 = y^2$.

4. Hitta alla heltal x, y och z sådana att $3(x^2 + y^2) = z^2$.

5. Vi har ett oändligt bräde med positiva heltal i varje ruta så att talet i varje ruta är genomsnittet av rutorna den delar en kant med. Visa att det står samma siffra i alla rutorna.

Invarians

Invarians är när man kollar på någonting i uppgiften som inte ändras oavsett hur man gör.

Exempel 4. Går det att fylla ett schackbräde, där två diagonalt motstående rutor tar bort, med dominobrickor som är 2×1 stora?
Lösning: Varje gång vi lägger en bricka så täcks en vit och en svart ruta. Eftersom vi på brädet har 32 vita rutor och 30 svarta (eller tvärt om) så kommer det inte gå att täcka hela brädet med dominobrickor.

Uppgifter

1. I en skål finns 5 röda och 6 gröna kulor. I varje drag tar man upp två kulor och lägger tillbaka en. Om man tar två kulor av samma färg lägger man tillbaka en grön kula och om man tar två kulor av olika färg lägger man tillbaka en röd. Till slut kommer det bara finnas en kula kvar i skålen - vilken färg har den?

2. I ett 4×4 bräde står det 1 i alla rutor utom i det nedre högra hörnet där det står -1. I varje drag byter man tecken på alla siffrorna i en rad eller en kolonn. Går det att efter en serie av drag ha siffran 1 i alla rutorna?

3. Låt n vara ett udda heltal. Från början står talen $1, 2, ..., 2n$ på en tavla. I varje drag suddar man ut två tal, a och b, och skriver upp deras positiva differens. Till slut kommer det bara finnas ett tal på tavlan - kommer detta vara udda eller jämnt?

Andra knep som används

Det finns massvis av olika problemlösningsstrategier och tillvägagångssätt när man får ett problem. Några av de vanligaste som inte har tagits upp tidigare är:

- Börja från slutet - gå baklänges och se vad som händer.
- Gör problemet enklare/annorlunda - kan man förenkla problemet för att få en uppfattning av vad som händer? Har jag tidigare löst ett liknande problem och kan jag använda det nu?
- Motsägelsebevis - det är ofta enklare att visa att motsatsen till ett påstående inte kan vara sann än att själva påståendet är sant. Men det är samma sak! Dock måste man vara noggrann med vad motsatsen är.

Ett avslutande problem

Vi ska avsluta med att lösa ett gammalt IMO-problem mha vissa av metoderna vi lärt oss.

Exempel 5. (IMO 1964) Hitta alla positiva heltal n sådana att $2^n - 1$ är jämnt delbart med 7.
Lösning: Problemet ser ganska svårt ut och svårhanterbart. Vi kollar på några specialfall först.
$n = 1$: $2^n - 1 = 1, n = 2 : 2^n - 1 = 3, n = 3 : 2^n - 1 = 7,$
$n = 4 : 2^n - 1 = 15, n = 5 : 2^n - 1 = 31, n = 6 : 2^n - 1 = 63,$
$n = 7 : 2^n - 1 = 127, n = 8 : 2^n - 1 = 255, n = 9 : 2^n - 1 = 511.$
Vi ser nu att alla talen i den tredje kolumnen är delbara med 7 och de andra är inte delbara med 7. Det verkar alltså vara så att om n är delbart med 3 så är $2^n - 1$ delbart med 7. Men hur visar vi detta? Jo med induktion!
Påstående: $2^n - 1$ är jämnt delbart med 7 om och endast om n är delbart med 3.

1. Grundfallet gäller (vi har visat att det gäller då $n = 1, 2, ..., 9$).
2. Antag att $2^n - 1$ är delbart med 7 om och endast om n är delbart med 3 för alla $n \geq k$.
3. Vi ska nu visa att vårt påstående även gäller då $n = k + 1$. Vi vidare falluppdelar nu.
   (a) Antag att k är delbart med 3. Då måste 2^k ha rest 1 vid division med 7. Alltså har $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ rest 2 vid division med 7 $\Rightarrow 2^{k+1} - 1$ är inte delbart med 7.
   (b) Antag att $k-1$ är delbart med 3. Då måste 2^{k-1} ha rest 1 vid division med 7. Alltså har $2^{k+1} = 4 \cdot 2^k$ rest 4 vid division med 7 $\Rightarrow 2^{k+1} - 1$ är inte delbart med 7.
   (c) Antag att $k-2$ är delbart med 3. Då måste 2^{k-2} ha rest 1 vid division med 7. Alltså har $2^{k+1} = 8 \cdot 2^k$ rest $8 - 7 = 1$ vid division med 7 $\Rightarrow 2^{k+1} - 1$ är delbart med 7.

Nu har vi med hjälp av induktion och falluppdelning visat att $2^n - 1$ är delbart med 7 om och endast om n är delbart med 3.