HÖJDPUNKTEN 2024

Öppen tävling den 9 maj 2024

UVS MATEMATIKER

Skrivtid: 3 timmar
Hjälpmedel: endast penna, sudd, passare och linjal
Motivera alla lösningar. Enbart svar ger inga pöang om inte annat anges.

Problem 1. Låt n vara ett positivit heltal. Visa att det finns en följd $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ av heltal större än 1 sådana att

$$a_0! \cdot a_1! \cdot a_2! \cdots a_{n-1}! = a_n!.$$

Problem 2. En ändlig mängd med positiva heltal $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ är given. Visa att det finns ett positivt heltal m så att talen $mk_1, mk_2, \ldots, mk_n$ alla har olika antal delare.

Problem 3.

(a) Tilda har en rektangulär bräda som är 1 dm lång och 16/9 dm bred. Visa att hon kan såga isär den i två delar som kan sättas ihop till en kvadrat.

(b) Hitta oändligt många tal x sådana att en 1 dm gånger x dm bräda kan sågas isär i två delar som kan sättas ihop till en kvadrat.

Problem 4. Ett polynom kallas *inversigt* om för alla rötter a så är $1/a$ också en rot. Låt f vara ett irreducibelt rationellt polynom av grad ≥ 2. Antag att f har en rot $b \in \mathbb{C}$ med $|b| = 1$. Visa att f är inversig och har jämn grad.

Problem 5. Ung Vetenskapssport har växt! Vi är nu många som är engagerade och vill ha tillgång till alla UVS olika kanaler för att nå ut till våra fantastiska medlemmar. Men ju fler som får tillgång, desto större blir säkerhetsrisken; vad händer om någon får sitt konto hackat? Vi behöver nu er hjälp för att lösa detta problem!
Det är n personer som vill ha tillgång till UVS konton. Vi vill hitta på ett system som garanterar att om $1 \leq m \leq n$ personer tillsammans vill logga in så kan de göra det, men om $m - 1$ personer vill logga in så har det inte nog med information för att göra det.
Efter långa diskussioner kom vi fram till följande förslag. Vi väljer ett lösenord med M siffror $x_1 x_2 \ldots x_M$, och avslöjar sedan någon delmängd av dessa siffror för varje person som vill ha tillgång till våra konton.

(a) Är det möjligt att dela ut siffrorna så att kravet ovan är uppfyllt?

(b) Om svaret är ja, vilket är det minsta M för vilket det är möjligt (uttryckt i n och m)?

Problem 6. Låt $\triangle ABC$ vara en triangel sådan att $|AB| < |AC|$. Låt B' vara punkten på sidan AC sådan att $|AB| = |AB'|$. Låt D vara en punkt sådan att $|AB| = |AD|$, skild från B och B'. Den omskrivna cirkeln till $\triangle B'CD$ skär linjen BC en andra gång i punkten E, skild från C. Bevisa att det existerar en fixpunkt K oberoende av D, sådan att linjen DE går genom K för alla möjliga val av punkten D.

Problem 7. Låt $\triangle ABC$ vara en triangel med omskriven cirkel Ω, och låt dess inskrivna cirkel ha medelpunkt I. Låt ω vara cirkeln med medelpunkt A som passerar genom I. Låt ω skära Ω i punkterna P och Q. Låt X vara skärningspunkten mellan linjerna PQ och BC. Låt ω_P och ω_Q vara de omskrivna cirklarna till $\triangle PXI$ respektive $\triangle QXI$. Låt ω_P och ω_Q skära linjen BC igen i punkterna P' respektive Q', skilda från X. Bevisa att linjerna PP' och QQ' skär varandra på ω.

Problem 8. Kevin vill simulera en tärning med n sidor. Till sin hjälp har han en $p-$sidig tärning för varje primtal $p < n$. Eftersom Kevin inte har hur mycket tid som helst för att slå tärningar, så vill han gärna minimera väntevärdet på antalet tärningskast. *Anmärkning: Detta problem är värt 10 poäng totalt.*

(a) Visa att om $n = pq$ för två primtal p, q (som inte nödvändigtvis är olika), så kan Kevin simulera en $n-$sidig tärning med exakt exakt 2 tärningskast. [1 poäng]

(b) Visa att han alltid behöver minst 2 kast, men att han kan uppnå ett väntevärde som är mindre än 3 för alla $n \geq 12$. [2 poäng]

(c) Visa att det finns oändligt många tal n som inte är på formen pq för två primtal p och q, sådana att Kevin kan simulera en $n-$sidig tärning med exakt 2 tärningskast. [7 poäng]

Problem 9. Givet heltal $d < n$ och ett reellt tal ε så säger vi att en uppsättning med d ortonormala vektorer $v_1, ..., v_d \in \mathbb{R}^n$ är $\varepsilon-$*balanserade* om

$$\forall j \in \{1, 2, ..., n\}: \quad \left| \sum_{i=1}^{d} v_{ij}^2 - \frac{d}{n} \right| \leq \varepsilon$$

Låt $n = d + 1$, och antag att $v_1, ..., v_d \in \mathbb{R}^{d+1}$ är en uppsättning ortonormala, $\varepsilon-$balanserade vektorer. Visa att det existerar en uppsättning ortonormala vektorer $w_1, w_2, ..., w_d \in \mathbb{R}^{d+1}$ som är $0-$balanserade och uppfyller

$$\sum_{i,j} (v_{ij} - w_{ij})^2 < Cd\varepsilon$$

för någon konstant C som inte beror på d och ε.

Problem 10. Ivar och Ravi bor i ett stort spökhus som består av n stycken rum. Varje rum har ett antal dörrar som leder till andra rum. Totalt finns det $n - 1$ dörrar, och det är möjligt att gå från vilket rum som helst till vilket annat rum som helst genom en serie dörrar.
En dag bestämmer sig husets spöken för att göra alla dörrar enkelriktade! Varje dörr färgas röd på ena sidan och indigo på andra sidan, och för att se till att Ivar och Ravi inte kan hålla ihop ser spökena till att Ivar bara kan gå genom indigo-färgade dörrar medan Ravi bara kan gå genom röda dörrar.
Eftersom spökena inte vill vara allt för elaka, så gav dem Ivar och Ravi möjligheten att vända på dörrar så att färgerna byter plats, men bara enligt vissa regler. Man får bara vända på en dörr om man är i ett rum som man inte kan lämna för att alla dörrar har fel färg, och man måste i så fall vända på *alla* dörrar i det rummet på en gång! Visa att, oavsett hur spökena färgade dörrarna och oavsett vilka rum Ivar och Ravi är i från början, så kan Ivar och Ravi gå runt i huset och vända på dörrarna så att vilken färg-konfiguration som helst uppnås.

Problem 11. Låt k vara ett positivt heltal. Låt S vara en oändlig mängd punkter i planet sådan att alla slutna cirklar med radie 1 innehåller högst k punkter i S. Visa att det finns en positiv konstant C oberoende av k och S sådan att:

(a) Det finns en cirkel med radie $r = 1 + \dfrac{C}{2^k}$ som innehåller högst k punkter i S.

(b) Det finns en cirkel med radie $r = 1 + \dfrac{C}{k}$ som innehåller högst k punkter i S.

Observera: Om du kan visa (b) behöver du inte ett separat bevis för (a). Om du har något resultat som är starkare än (a) men svagare än (b), kan vi ge poäng för det.