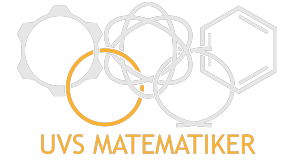


# HÖJDPUNKTEN 2024

## Högstadietävling den 8-9 maj 2024



**Skrivtid:** 3 timmar

**Hjälpmedel:** endast penna, sudd, passare och linjal

**Motivera alla lösningar.** Enbart svar ger inga poäng om inte annat anges.

**Problem 1.** Ett primtal är ett tal större än 1 som bara kan delas med 1 och sig självt.

- (a) Vilka är de 9 första primtalen? (*Endast svar krävs*)
- (b) Fyll i de 9 första primtalen i de oskuggade rutorna i figuren nedan så att summan i varje rad och kolumn slutar på 0. Varje tal ska användas exakt en gång. (*Endast svar krävs*)

■		
	■	
■		

Problem 1

**Problem 2.** Julia har klurat ut ett sätt att aldrig få slut på saft! Varje gång hon druckit upp halva sitt glas, fyller hon på med vatten så det blir fullt igen. På så sätt tar det aldrig slut. Problemet är att saften blir lite svagare för varje gång.

Julia började med att blanda en tillbringare med 1 skopa koncentrerad saft och 5 skopor vatten. Efter det har hon druckit upp halva glaset och fyllt på med vatten tre gånger.

- (a) Hur stor är andelen koncentrerad saft i glaset nu?
- (b) Julia vill gärna att saften ska smaka bra igen. Hon tänker därför dricka en del av den alldeles för svaga saften, och sen fylla på med mer koncentrat istället för vatten. Hur stor del av glaset ska hon dricka för att koncentrationen ska bli samma som den var från början?

**Problem 3.** Rektorn på din skola ville räkna hur många elever som var på skolgården. Hon visste att det finns som mest 300 elever, för det är så många som går på skolan totalt. Plötsligt fick hon en idé! Hon bad alla elever att ställa sig i grupper om 5, och det visade sig att det gick jämnt ut. Sen bad hon alla elever ställa sig i grupper om 9. Det visade sig då att det i den sista gruppen bara blev 7 elever, medan det i alla andra var exakt 9. Till sist bad hon alla ställa sig i grupper om 4, och då gick det också jämnt ut! Hur många elever var det på skolgården?

**Problem 4.** Femhörningen i mitten är regelbunden. Hur stor andel av stjärnan är färglagd?



Problem 4

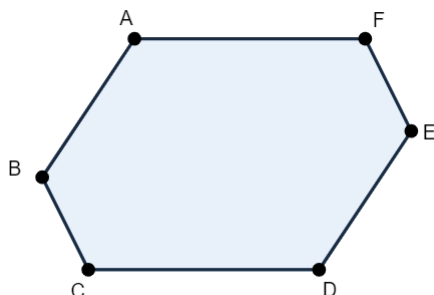
**Problem 5.** Bland talen från 1 till 12 finns det tillsammans 5 stycken 1:or. Hur många 1:or finns det bland talen 1 till 2024 tillsammans?

**Problem 6.** Exakt vid midnatt till fredagen den 13, så skapar den galna professorn Sonja ett 1 kilo tungt slimemonster. Det växer sig 12 gånger så stort på en timme, och klockan 01:00 delar det upp sig i 12 mindre slimes. Alla dessa växer sig sedan 24 ( $= 2 \cdot 12$ ) gånger så stora, och klockan 02:00 delar de upp sig i 11 mindre slimes var. Deras avkommor växer sig i sin tur 36 ( $= 3 \cdot 12$ ) gånger så stora, och klockan 03:00 delar de upp sig i 10 mindre slimes o.s.v. Denna reproduktion pågår ända till klockan 12:00 på dagen. Visa att varje slime då väger mer än en miljard ton.

**Problem 7.** Tilda har en rektangulär bräda som är 9 cm lång och 4 cm bred. Hur kan hon såga isär den i två delar som hon kan sätta ihop till en kvadrat?

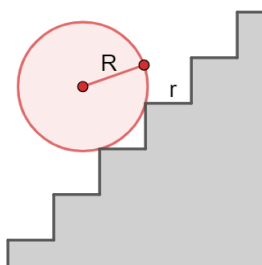
**Problem 8.** En brevbärare har sex rektangulära brev med sidlängder som är heltal mellan 1 och 10. Visa att något av breven kan täcka ett annat av breven.

**Problem 9.** Givet är en konvex hexagon  $ABCDEF$  där motsatta sidor är parallella och lika långa, alltså att  $AB = DE$ ,  $BC = EF$  och  $CD = FA$ . Bevisa att de tre linjerna  $AD$ ,  $BE$  och  $CF$  skär varandra i en punkt.



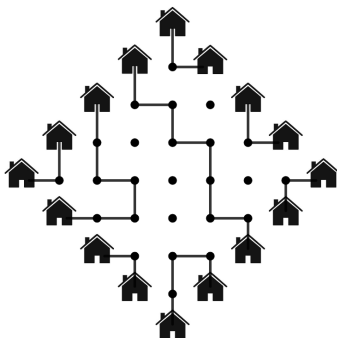
Problem 9

**Problem 10.** Ett hjul med radie  $R$  rullar uppför en trappa vars steg är kvadrater med sidlängd  $r < R$ . Det är givet att  $R^2 = 2r^2$ . Hur många trappsteg behöver hjulet rulla upp för innan det roterat ett helt varv?



Problem 10

**Problem 11.** I en by står sexton hus formaterade som en diamant (se bild). Varje hus är kopplat till exakt ett annat hus via en stig. Stigarna följer rutnätet och kan inte dela upp sig eller korsa andra stigar. Visa att oavsett hur husen paras ihop och hur stigarna går, så finns det åtminstone en prick i rutnätet som inte passeras av någon stig.



Problem 11