HÖJDPUNKTEN 2024

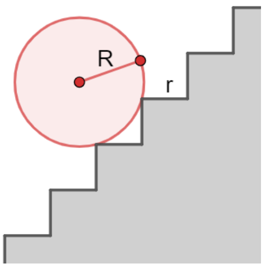
Gymnasietävling den 8-9 maj 2024

Skrivtid: 3 timmar
Hjälpmedel: endast penna, sudd, passare och linjal
Motivera alla lösningar. Enbart svar ger inga pöang om inte annat anges.

Problem 1. Mio har $3^{4^{5^2}}$ korvar och $9^{2^{7^2}}$ korvbröd. Räcker korvbröden till alla korvar?
Anmärkning: potenstorn beräknas uppifrån ner. 2^{2^3} *betyder alltså* 2^8 *och inte* 4^3.

Problem 2. Sebastian har 100 kulor i 10 olika färger, men det kan finnas olika många av de olika färgerna. Han vill placera dem i 10 högar med 10 kulor i varje hög. Visa att han kan garantera att det är max två olika färger i varje hög.

Problem 3. Ett hjul med radie R rullar uppför en trappa vars steg är kvadrater med sidlängd $r < R$. Det är givet att $R^2 = 2r^2$. Hur många trappsteg behöver hjulet rulla upp för innan det roterat ett helt varv?



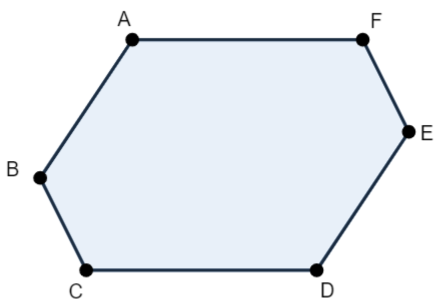
Problem 3

Problem 4. Visa att det finns oändligt med lösningar till ekvationen $a!b! = c!$ där a, b och c är heltal större än eller lika med 2.
Anmärkning: $n!$ *betecknar produkten av alla positiva heltal mindre än eller lika med* n.

Problem 5. Vilket är det största talet vars alla siffror är olika, och som är delbart med alla sina siffror?

Problem 6. Vad är heltalsdelen i talet $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}$?

Problem 7. Givet är en konvex hexagon $ABCDEF$ där motsatta sidor är parallella. Visa att de tre diagonalerna AD, BE och CF skär varandra i en punkt om och endast om motsatta sidor är lika långa (alltså $AB = DE$, $BC = EF$ och $CD = FA$).



Problem 7

Problem 8.

(a) Tilda har en rektangulär bräda som är 1 meter bred och 2,25 meter lång. Visa att hon kan såga isär den i två delar som kan sättas ihop till en kvadrat.

(b) Visa att det finns oändligt många tal x sådana att en $1\,\mathrm{m} \times x\,\mathrm{m}$ bräda kan sågas isär i två delar och sättas ihop till en kvadrat.

Problem 9. Ruth är en rätblockssamlare som bara samlar på rätblock med volym n och vars alla kanter har heltalslängder. En dag tog hon fram alla sina rätblock, och la dem på en lång rad. Hon la då märke till ett lustigt sammanträffande: när hon kollade på rätblocken uppifrån såg de alla ut som rekanglar och inga av dem var kongruenta med varandra! Dessutom var ingen av dem en kvadrat. Visa att Ruth omöjligen kan ha fler än n rätblock.

Problem 10. Kevin har en $p-$sidig tärning för varje primtal p mindre än 42. Visa att han kan simluera en $42-$sidig tärning (dvs välja ett heltal mellan 1 och 42 så att sannolikheten är samma för alla) med endast:

(a) Tre tärningskast.

(b) Två tärningskast.

Problem 11. Ivar och Ravi bor i ett stort spökhus som består av n stycken rum. Varje rum har ett antal dörrar som leder till andra rum. Totalt finns det $n-1$ dörrar, och det är möjligt att gå från vilket rum som helst till vilket annat rum som helst genom en serie dörrar.
En dag bestämmer sig husets spöken för att göra alla dörrar enkelriktade! Varje dörr färgas röd på ena sidan och indigo på andra sidan, och för att se till att Ivar och Ravi inte kan hålla ihop ser spökena till att Ivar bara kan gå genom indigo-färgade dörrar medan Ravi bara kan gå genom röda dörrar.
Eftersom spökena inte vill vara allt för elaka, så gav dem Ivar och Ravi möjligheten att vända på dörrar så att färgerna byter plats, men bara enligt vissa regler. Man får bara vända på en dörr om man är i ett rum som man inte kan lämna för att alla dörrar har fel färg, och man måste i så fall vända på *alla* dörrar i det rummet på en gång! Visa att, oavsett hur spökena färgade dörrarna och oavsett vilka rum Ivar och Ravi är i från början, så kan Ivar och Ravi gå runt i huset och vända på dörrarna så att vilken färg-konfiguration som helst uppnås.