HÖJDPUNKTEN

Ung Vetenskapssport

Skrivtid: 3h
Hjälpmedel: Endast penna, sudd, passare och linjal

Gymnasietävling den 11 mars 2023

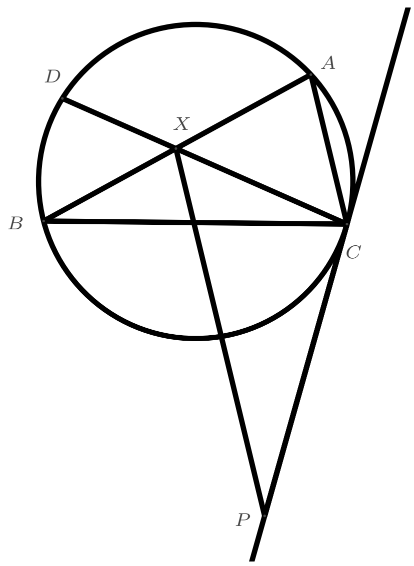
Problem 1. Det sitter 100 personer i en ring. Vi vet att vissa av dem är lögnare som alltid ljuger, och att vissa av dem är sanningssägare som alltid talar sanning, men vi vet inte vem som är vad. Alla i ringen säger att de sitter bredvid minst en lögnare. Vilket är det minsta och största antal lögnare som kan finnas i ringen?

Problem 2. Bestäm alla heltal n för vilka $n^4 - 3n^2 + 9$ är ett primtal.

Problem 3. Bestäm alla par av positiva heltal (m, n) sådana att man kan bygga en rektangel av m stycken vetikala dominobrickor och n stycken horisontella dominobrickor. En dominobricka består av två lika stora kvadrater som satts ihop längs med sina kanter. Man får inte rotera dominobrickorna och alla är lika stora.

Problem 4. Eleverna i UVS-byn bor i n höghus som ligger jämnt utspridda längs med en och samma gata. I det första huset bor 1 elev, i det andra huset bor 2 elever, och så vidare till och med hus nummer n där n elever bor. När det är dags att organisera en stor mattetävling vill arrangörerna veta i vilket hus de ska hålla tävlingen för att minimera den totala ressträckan för alla eleverna. Vilket hus ska de välja? Notera att svaret kan bero på vad n är.

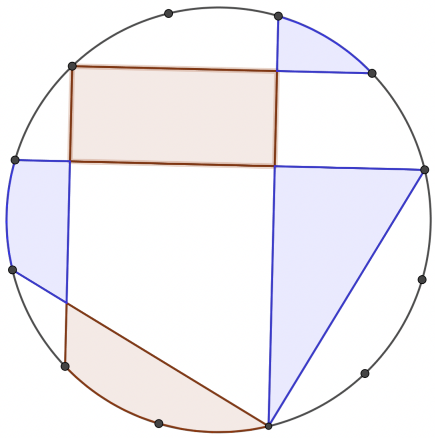
Problem 5. Låt ABC vara en triangel, och låt (ABC) vara dess omskrivna cirkel. Låt P vara en punkt utanför cirkeln sådan att PC tangerar (ABC) och så att $PC = BC$. Låt nu X vara en punkt på kordan AB så att PX är parallell med AC, och låt linjen CX skära (ABC) i punkten D. Visa att $BD = DX$.



Problem 6. Låt $n \leq 100$ vara ett positivt heltal. Vi räknar ut talen $0 \cdot n$, $1 \cdot n$, ..., $100 \cdot n$ i den ordningen, och skriver ner dessa tals rester vid division med 101 i en lång rad. För hur många par av intilliggande tal i raden är det vänstra större än det högra?

Problem 7. På tavlan står talen $1, 2, 3, ..., 1000$. Kevin väljer ut 12 av dem, och suddar ut resten. Därefter noterar han att ingen summa av några tal som är kvar på tavlan är ett potenstal. Är detta möjligt?

Problem 8. Bevisa att summan av areorna av de blå områdena är samma som summan av areorna av de röda områdena. Figuren är en cirkel och punkterna på omkretsen är jämnt utspridda.



Problem 9. Bestäm det minsta positiva heltalet n sådant att om talen $404, 405, ..., n$ delas in i två grupper så finns alltid tre olika tal x, y, z som är i samma grupp sådana att $x + y = z$?

Problem 10. Låt S bestå av $2^k + 1 \geq 3$ olika positiva heltal. Vi kallar ett primtal *snällt* om det delar summan av två distinkta tal i S. Visa att det finns minst $k + 1$ *snälla* primtal.

Problem 11. I landet långt borta pågår en kamp mellan två lag - det röda laget och det blåa laget. Landet består av n stycken städer. Vissa par av städer är hopkopplade med vägar. I början tillhör vägarna inte något av lagen. De turas sen om att välja en väg som inget av lagen hittills valt, och färgar den med sin egen färg. Det röda laget väljer först.
Om det vid något tillfälle är möjligt att längs med endast blåa vägar resa mellan alla par av städer, så vinner det blåa laget. Om alla vägar valts (av något lag) utan att blåa laget har uppnått detta än, så vinner det röda laget.
Visa att det blåa laget vinner om och endast om det går att dela in vägarna i två olika grupper, så att det inom varje grupp går att ta sig mellan varje par av städer.