HÖJDPUNKTEN 2023
Ung Vetenskapssport

Gymnasietävling - lösningsförslag

Problem 1

Det sitter 100 personer i en ring. Vi vet att vissa av dem är lögnare som alltid ljuger, och att vissa av dem är sanningssägare som alltid talar sanning, men vi vet inte vem som är vad. Alla i ringen säger att de sitter bredvid minst en lögnare. Vilket är det minsta och största antal lögnare som kan finnas i ringen?

Lösning

Svaret är att det finns minst 34 lögnare och max 50. Beteckna en lögnare med L och en sanningssägare med S. Vi gör följande observationer:

(a) Inga lögnare kan sitta bredvid varandra, för då skulle de inte ljuga. Alltså finns *som mest* $\frac{100}{2} = 50$ lögnare. Vi kan också uppnå detta genom att sätta varannan L och varannan S:

$$LSLSLSLSLS...LSLS$$

(b) Det kan aldrig vara tre sanningssägare i rad, för då skulle den i mitten inte tala sanning. Det ger att minst var tredje person är en lögnare, så det finns *minst* $\frac{100}{3} > 33$ lögnare, alltså minst 34 stycken. Vi kan också uppnå detta:

$$LSLSLSSLSSLSSLSS...LSSLSS$$

där vi placerat LSLS i början och sedan 32 stycken kopior av LSS.

Det är enkelt att dubbelkolla att exemplen vi gav som uppnår 34 respektive 50 lögnare faktiskt funkar och ger dessa antal lögnare, så vi är klara!

Problem 2

Bestäm alla heltal n för vilka $n^4 - 3n^2 + 9$ är ett primtal.

Lösning

Det är ett primtal om och endast om $n = -2, -1, 1$ eller 2.
Vi har att

$$n^4 - 3n^2 + 9 = (n^2 - 3n + 3)(n^2 + 3n + 3)$$

Detta är enkelt att kontrollera genom att expandera paranteserna, men nedan finns också exempel på olika sätt som man kan komma fram till denna faktorisering! Genom att kvadratkomplettera får vi nu för de två faktorerna att

$$n^2 \pm 3n + 3 = \left(n \pm \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 1$$

där olikheten följer från att n är ett heltal och att kvadraten därför är minst $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Notera att

- för $n^2 - 3n + 3$ har vi likhet om och endast om $n = 1$ eller $n = 2$
- för $n^2 + 3n + 3$ har vi likhet om och endast om $n = -1$ eller $n = -2$

Om inget av dessa fall gäller så är båda faktorerna heltal större än 1, men då kan $n^4 - 3n^2 + 9$ inte vara ett primtal. Alltså behöver vi bara kolla följande fall:

- $n = -2$: $(-2)^4 - 3 \cdot (-2)^2 + 9 = 13$, vilket är ett primtal
- $n = -1$: $(-1)^4 - 3 \cdot (-1)^2 + 9 = 7$, vilket är ett primtal
- $n = 1$ och $n = 2$ ger då också primtal, eftersom $n^4 - 3n^2 + 9 = (-n)^4 - 3(-n)^2 + 9$

Olika sätt att komma fram till faktoriseringen:

- Notera att
$$\begin{aligned} n^4 - 3n^2 + 9 &= n^4 + 6n^2 + 9 - 9n^2 \\ &= (n^2 + 3)^2 - (3n)^2 \\ &= (n^2 - 3n + 3)(n^2 + 3n + 3) \end{aligned}$$
där vi använder konjugatregeln i sista steget.

- Detta är ungefär samma metod som ovan, men utskrivet på ett annat sätt. Vi inkluderar det eftersom det ofta är en bra idé att göra den här typen av substitution när man har ett polynom som är "symmetriskt" (vårt polynom blir symmetriskt om vi sätter in $\sqrt{3}x$).
Låt $t = n + \frac{3}{n}$. Vi får att
$$t^2 - 9 = \frac{1}{n^2}(n^4 - 3n^2 + 9)$$
vilket ger att
$$\begin{aligned} n^4 - 3n^2 + 9 &= (nt)^2 - 9n^2 \\ &= (n^2 + 3)^2 - (3n)^2 \\ &= (n^2 - 3n + 3)(n^2 + 3n + 3) \end{aligned}$$

- Låt $t = n^2$. Vi får att
$$n^4 - 3n^2 + 9 = t^2 - 3t + 9$$
Vi kan hitta rötterna till detta polynomet med hjälp av kvadratkomplettering (eller $pq-$formeln) och får rötter
$$t = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9} = \frac{3}{2} \pm i\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3e^{\pm\pi i/3}$$
vilket ger
$$n = \begin{cases} \sqrt{3}e^{\pm\pi i/6} \\ \sqrt{3}e^{\pm 5\pi i/6} \end{cases}$$
som alla fyra rötter till polynomet. Därmed kan vi enligt faktorsatsen för polynom faktorisera
$$\begin{aligned} n^4 - 3n^2 + 9 &= (n - \sqrt{3}e^{\pi i/6})(n - \sqrt{3}e^{-\pi i/6})(n - \sqrt{3}e^{5\pi i/6})(n - \sqrt{3}e^{-5\pi i/6}) \\ &= (n^2 - 3n + 3)(n^2 + 3n + 3) \end{aligned}$$
där vi i sista steget multiplicerar de första två faktorerna med varandra och de sista två med varandra (det är enkelt att kolla att vi får det som påstås).

Problem 3

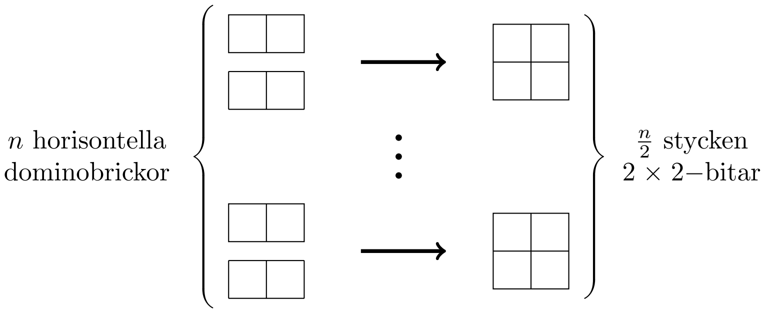
Bestäm alla par av positiva heltal (m, n) sådana att man kan bygga en rektangel av m stycken vetikala dominobrickor och n stycken horisontella dominobrickor. En dominobricka består av två lika stora kvadrater som satts ihop längs med sina kanter. Man får inte rotera dominobrickorna och alla är lika stora.

Lösning 1

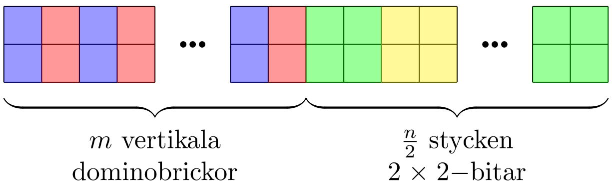
Svaret är att man kan bygga en rektangel om och endast om minst en av n och m är jämna.

Om n eller m är jämnt funkar det:

Om n är jämnt så kan vi para ihop de horisontella bitarna i $\frac{n}{2}$ stycken $2 \times 2-$bitar:



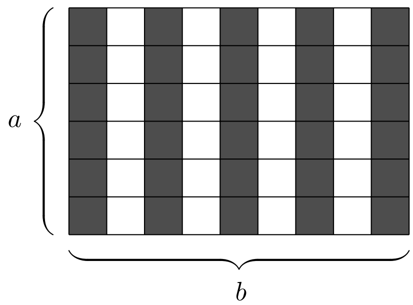
Därefter kan vi bygga ihop en $2 \times (m + n)-$rektangel såhär:



Om m är jämnt funkar exakt samma lösning, fast roterat.

Om n och m är udda funkar det inte:

Anta nu att m och n båda är udda, och att vi på något sätt lyckats bygga ihop en rektangel av storlek $a \times b$ (alltså a rader och b kolumner) med hjälp av m stycken vertikala dominobrickor och n stycken horisontella. Arean av rektangeln kan uttryckas som ab, men också som $2(m + n)$ eftersom varje dominobricka har area 2. Alltså är arean jämn, vilket betyder att antingen a eller b måste vara ett jämnt tal. Låt oss säga att a är jämnt (det blir förstås exakt samma resonemang om b är jämnt, fast roterat). Färglägg nu rektangeln så att varannan kolumn är svart och varannan är vit, som i bilden nedan:



Eftersom a är ett jämnt tal så är antalet svarta rutor jämnt. Men varje vertikal bricka täcker 0 eller 2 svarta rutor (alltså ett jämnt antal) och varje horisontell bricka täcker exakt 1 svart ruta. Eftersom antalet horisontella brickor är udda betyder det att alla brickor tillsammans täcker ett udda antal svarta rutor. Det är en motsägelse, så vi har visat att det inte kan ha varit möjligt att bygga rektangeln med m vertikala och n horisontella brickor.

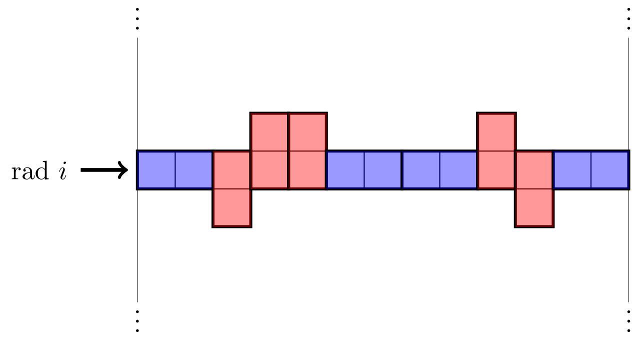
Lösning 2

Vi visar på samma sätt som i lösning 1 att det funkar om n eller m är jämnt.

Det återstår att visa att om båda är udda så går det inte att bygga en rektangel. Anta att vi på något sätt ändå lyckats bygga ihop en rektangel av storlek $a \times b$ (alltså a rader och b kolumner) med hjälp av m stycken vertikala dominobrickor och n stycken horisontella.

Det måste finnas någon rad i sådan att antalet vertikala brickor som startar i rad i och slutar i rad $i+1$ är udda (för om det är jämnt för alla rader så skulle det vara ett jämnt antal vertikala brickor totalt). Låt i vara den första raden för vilket detta händer. Då vet vi att det finns ett jämnt antal vertikala dominobrickor som startar i rad $i-1$ och slutar i rad i (notera att om $i = 1$ så finns 0 brickor som startar i rad $i-1$ och slutar i rad i, och 0 är jämnt). Alltså kommer det totala antalet rutor i rad i som täcks av en vertikal bricka vara udda (se de röda brickorna i bilden). Vidare måste det vara ett jämnt antal rutor i rad i som täcks av en horisontell bricka, eftersom varje horisontell bricka i den raden måste täcka två rutor (se de blåa brickorna i bilden). Men då är det totala antalet rutor som täcks i rad i udda, vilket betyder att bredden b på rektanglen är udda.

Eftersom antalet horisontella brickor också är udda ger exakt samma argument att höjden a på rektangeln är udda. Men då är rektangelns area ab udda, vilket inte kan hända då varje bricka täcker två rutor. Vi har fått en motsägelse, och är alltså klara.



I bilden syns alla brickor som har minst en ruta på rad i. De blåa är horisontella: var och en av dem täcker två rutor, så tillsammans täcker de ett jämnt antal rutor. De röda är vertikala och täcker en ruta var i rad i. Ett jämnt antal börjar i rad $i-1$, medan ett udda antal börjar i rad i, så tillsammans täcker de ett udda antal rutor i rad i.

Problem 4

Eleverna i UVS-byn bor i n höghus som ligger jämnt utspridda längs med en och samma gata. I det första huset bor 1 elev, i det andra huset bor 2 elever, och så vidare till och med hus nummer n där n elever bor. När det är dags att organisera en stor mattetävling vill arrangörerna veta i vilket hus de ska hålla tävlingen för att minimera den totala ressträckan för alla eleverna. Vilket hus ska de välja? Notera att svaret kan bero på vad n är.

Lösning 1

Svaret är hus nummer $M = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{2n(n+1)+1}}{2} \right\rceil$ (där $\lceil\ \rceil$ betyder avrundat uppåt). Om $\sqrt{2n(n+1)+1}$ är ett heltal är både M och $M+1$ är lika bra, annars är M det unikt bästa huset.

Det totala antalet personer som bor i UVS-byn är $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Vi visar detta genom att räkna ut dubbla summan genom hopparning av termerna:

$$\begin{array}{rccccccccc}
2\cdot(1+2+...+n) = & & 1 & + & 2 & +...+ & (n-1) & + & n \\
 & + & n & + & (n-1) & +...+ & 2 & + & 1 \\
\hline
 = & & (n+1) & + & (n+1) & +...+ & (n+1) & + & (n+1) \\
 = & & n(n+1) & & & & & &
\end{array}$$

Låt säga att vi valt ett hus k. För att det ska vara optimalt måste det åtminstone vara bättre än hus $k-1$ och hus $k+1$.

- Vad händer om vi flyttar till hus $k+1$? För alla som bor i hus 1 till k skulle avståndet öka med ett, medan det för resterande personer skulle minska med ett. Alltså är det bara bättre att stanna i hus k om *minst hälften bor i hus* 1 *till* k.
- Vad händer om vi flyttar till hus $k-1$? För alla som bor i hus 1 till $k-1$ skulle avståndet minska med ett, medan det för resterande personer skulle öka med ett. Alltså är det bara bättre att stanna i hus k om *max hälften bor i hus* 1 *till* $k-1$.

Vi söker alltså ett hus k så att minst hälften bor i hus 1 till k och max hälften bor i hus 1 till $k-1$. Enligt samma resonemang som ovan så bor det $1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$ personer i hus 1 till k och $\frac{(k-1)k}{2}$ personer i hus 1 till $k-1$. Det låter oss omformulera observationen om vilket k vi söker som

$$\frac{(k-1)k}{2} \leq \frac{n(n+1)}{4} \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

där vi noterar att $\frac{n(n+1)}{4}$ är hälften av alla i byn. Om vi multiplicerar alla tre uttryck i olikheterna med 8 och adderar 1 till alla så måste de fortfarande stämma, så vi får

$$4k^2-4k+1 \leq 2n(n+1)+1 \leq 4k^2+4k+1$$
$$(2k-1)^2 \leq 2n(n+1)+1 \leq (2k+1)^2$$

där andra raden följer från första raden enligt kvadreringsreglerna. Notera att alla tal är positiva, och att vi därför genom att först ta roten ur alla tre tal och sen dela dem alla med 2 får att

$$k-\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2n(n+1)+1}}{2} \leq k+\frac{1}{2}$$

vilket ger att

$$\frac{-1+\sqrt{2n(n+1)+1}}{2} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{2n(n+1)+1}}{2}$$

Om $\sqrt{2n(n+1)+1}$ inte är ett heltal så är $\frac{-1+\sqrt{2n(n+1)+1}}{2}$ och $\frac{1+\sqrt{2n(n+1)+1}}{2}$ inte heller ett heltal. Men skillnaden mellan dem är exakt 1, så då finns exakt ett heltal k som uppfyller dessa olikheter: den undre gränsen avrundat uppåt, vilket är precis M. Eftersom det bästa huset måste uppfylla dessa olikheter så är M det bästa huset.

Om $\sqrt{2n(n+1)+1}$ är ett heltal så måste det vara udda (eftersom $2n(n+1)+1$ är ett udda heltal), men då blir också $\frac{-1+\sqrt{2n(n+1)+1}}{2}$ ett heltal och därmed är $M = \frac{-1+\sqrt{2n(n+1)+1}}{2}$ (ett heltal avrundat uppåt blir sig självt). Olikheterna ovan uppfylls då av två heltal: både $k=M$ och $k=M+1$. Men vi får också att $1+2+...+M = \frac{M(M+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$. Med andra ord så är precis hälften av alla i byn ett steg närmare M än $M+1$, medan andra hälften är ett steg närmare $M+1$ än M. I detta fall är hus M och $M+1$ alltså precis lika bra.

Lösning 2

Låt säga att vi valt hus k. Avståndet för personen i hus a är då $|k-a|$, och eftersom det bor a personer i hus nummer a så blir den totala ressträckan

$$\begin{aligned}1 \cdot |k-1| + 2 \cdot |k-2| + \ldots + n \cdot |k-n| &= \sum_{a=1}^{k-1} a(k-a) + \sum_{a=k+1}^{n} a(a-k) \\ &= 2\sum_{a=1}^{k-1} a(k-a) + \sum_{a=1}^{n} a(a-k)\end{aligned}$$

där den första likheten följer från att $|k-a| = k-a$ om $k > a$ och $|k-a| = a-k$ om $k < a$, medan vi i den andra likheten lägger till $\sum_{a=1}^{k-1} a(k-a)$ till den första summan och $-\sum_{a=1}^{k-1} a(k-a)$ till den andra (så det totala värdet är oförändrat). Notera nu att vi med hjälp av induktion kan visa att:

$$\sum_{a=1}^{m} a = \frac{m(m+1)}{2}, \qquad \sum_{a=1}^{m} a^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

för alla heltal $m \geq 1$ (detta lämnas som en övning). Vi kan med hjälp av dessa resultat skriva om summorna i den totala ressträckan på sluten form:

$$\begin{aligned}&\sum_{a=1}^{k-1} a(k-a) = k\sum_{a=1}^{k-1} a - \sum_{a=1}^{k-1} a^2 = k\frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} = \frac{(k-1)k(k+1)}{6} \\ &\sum_{a=1}^{n} a(a-k) = \sum_{a=1}^{n} a^2 - k\sum_{a=1}^{n} a = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - k\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Sätter vi in dessa uttryck i den ursprungliga formeln får vi att den totala ressträckan till hus k är

$$\begin{aligned}f(k) &= \frac{(k-1)k(k+1)}{3} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - k\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{k^3-k}{3} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - k\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Vi vill nu hitta det hus k som minimerar ressträckan $f(k)$. Vi har att (efter lite förenkling)

$$f(k+1) - f(k) = k^2 + k - \frac{n(n+1)}{2}$$

Så k är bättre än $k+1$ om och endast om $k^2 + k = (k+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} > \frac{n(n+1)}{2}$, vilket (under antagande att k är positivt) händer om och endast om $k > \frac{-1+\sqrt{2n(n+1)+1}}{2}$. Med andra ord så kommer vi för $k < M = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{2n(n+1)+1}}{2} \right\rceil$ alltid hellre flytta ett hus uppåt, medan vi för $k \geq M+1$ hellre flyttar ett hus neråt. Så svaret är M (och det är lika bra som $M+1$ om $M^2 + M = \frac{n(n+1)}{2}$).

Anmärkning: Det är lockande att minimera f genom att derivera. Vi får (eftersom n är konstant)

$$f'(k) = k^2 - \frac{1}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$$

Derivatan är positiv (så f är ökande) för $k > \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{n(n+1)}{2}}$ och negativ (så f är minskande) för $0 < k < \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{n(n+1)}{2}}$, så f är minimerad för

$$k = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{\sqrt{2n(n+1) + \frac{4}{3}}}{2}$$

Nu har vi dock tillåtit att k inte är ett heltal, trots att vi måste välja ett hus med ett heltalsnummer. Eftersom $f(k)$ är minskande för mindre k och ökande för större k, så måste svaret vara

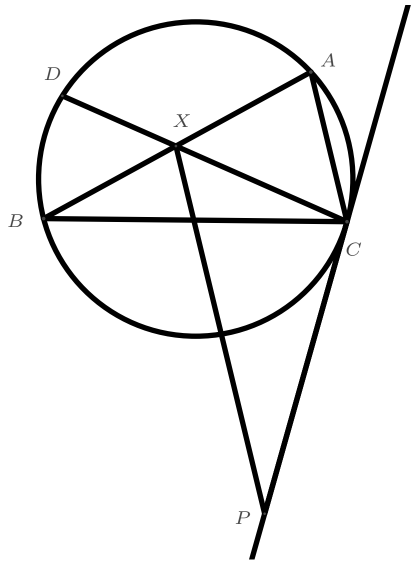
$$\left\lfloor \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{n(n+1)}{2}} \right\rfloor \qquad \textit{eller} \qquad \left\lceil \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{n(n+1)}{2}} \right\rceil$$

Det visar sig dock vara ganska svårt att avgöra exakt vilket av dessa uttryck som ger rätt svar, det enklaste är troligen att betrakta $f(M+1)-f(M)$, vilket i princip leder oss till lösningen ovan i alla fall. Notera att det är möjligt att kontrollera att ett av dessa uttryck alltid kommer vara lika med svaret vi kom fram till (egentligen har vi i princip bevisat det här, eftersom minst ett av dem måste vara det korrekta svaret till uppgiften).

Vidare är det intressant att notera att metoderna som presenteras i lösning 1 och lösning 2 båda i någon bemärkelse bygger på att räkna ut $f(k+1)-f(k)$ och analysera när detta är positivt, även om vi använde olika sätt att komma fram till ett uttryck för denna differens. I någon bemärkelse är detta lite som att "derivera", fast vi betraktar bara "hopp" av längd 1 istället för att låta hoppens längd gå mot 0. Eftersom vi bara letar efter heltal k är detta en mycket bättre metod för oss än att derivera.

Problem 5

Låt ABC vara en triangel, och låt (ABC) vara dess omskrivna cirkel. Låt P vara en punkt utanför cirkeln sådan att PC tangerar (ABC) och så att $PC = BC$. Låt nu X vara en punkt på kordan AB så att PX är parallell med AC, och låt linjen CX skära (ABC) i punkten D. Visa att $BD = DX$.



Lösning

Enligt korda-tangentsatsen är

$$\angle PCB = \angle CDB \tag{1}$$

eftersom PC är tangent till cirkeln. Eftersom AC är parellell med PX så är

$$\angle PXB = \angle CAB = \angle CDB \tag{2}$$

där vi använder randvinkelsatsen i sista steget. Om vi kombinerar dessa två insikter ser vi att

$$\angle PCB = \angle PXB \tag{3}$$

eftersom de båda är lika med $\angle CDB$, vilket ger att $BXCP$ är cyklisk. Därmed får vi

$$\angle BPC = 180 - \angle BXC = \angle BXD \tag{4}$$

Till sist så ger (1) och (4) att $\triangle BDX \sim BCP$ vilket ger att $|DB| = |DX|$ eftersom $|CB| = |CP|$.

Problem 6

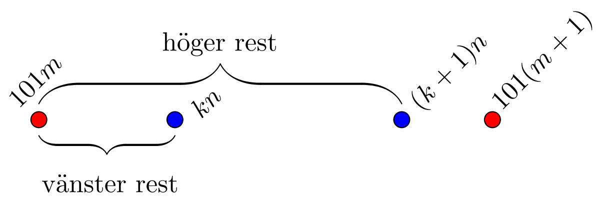
Låt $n \leq 100$ vara ett positivt heltal. Vi räknar ut talen $0 \cdot n$, $1 \cdot n$, ..., $100 \cdot n$ i den ordningen, och skriver ner dessa tals rester vid division med 101 i en lång rad. För hur många par av intilliggande tal i raden är det vänstra större än det högra?

Lösning 1

Svaret är $n-1$. Vi färglägger alla *positiva* multiplar av 101 röda (alltså talen $101, 202, 303, \ldots$), medan talen $0 \cdot n, 1 \cdot n, \ldots, 100 \cdot n$ färgläggs blåa (notera att vi färglägger talen själva och *inte* deras rester vid division med 101). Vi har att:

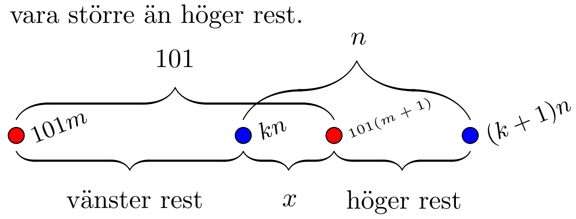
- Inget tal är både blått och rött (eftersom 101 är ett primtal, så inget av talen $1 \cdot n, \ldots, 100 \cdot n$ kan vara en multipel av 101)
- Om två intilliggande blåa tal $k \cdot n$ och $(k+1) \cdot n$ inte har några röda tal mellan sig, så är resten vid division med 101 mindre för det vänstra av dem.

  Bevis: Båda ligger mellan samma par av på varandra följande multiplar av 101, så när vi dividerar med 101 *med rest* får vi samma kvot för båda. Men då måste resten bli större för det större talet.



- Om två intilliggande blåa tal $k \cdot n$ och $(k+1) \cdot n$ har ett rött tal mellan sig, så är resten vid division med 101 större för det vänstra av dem.

  Bevis: I bilden ser vi att “vänster rest”$+x = 101$ medan “höger rest”$+x = n < 101$. Alltså måste vänster rest vara större än höger rest.



- Två intilliggande blåa tal kan inte ha två röda tal mellan sig. Det är för att avståndet mellan dem är n medan avståndet mellan två intilliggande röda tal är $101 > n$.

Sammanfattningsvis har vi visat att givet ett par av intilliggande blåa tal kn och $(k+1)n$ så kommer det vänstra ha en större rest vid division med 101 om och endast om det finns ett rött tal mellan dem, och det finns max ett rött tal mellan dem. Eftersom varje röd punkt under $100n$ också ligger mellan två intilliggande blåa punkter, så finns lika många sådana röda punkter som par av intilliggande blåa punkter med en röd punkt mellan. Detta antal är:

$$\left\lfloor \frac{100n}{101} \right\rfloor = \left\lfloor n - \frac{n}{101} \right\rfloor = n - 1$$

där den sista likheten följer från att $n < 101$. Så svaret är $n-1$.

Anmärkning: För den som inte tycker att bevisen med bilderna ovan är övertygande kommer här ett mer tekniskt bevis. I den första bilden har vi fått givet att det för något m gäller att:

$$kn = 101m + r \qquad (k+1)n = 101m + s$$

där r och s är resterna vid division med 101, som båda ligger mellan 0 och 100. Det måste då gälla att $s > r$ eftersom $k+1$ är större än k.

I den andra bilden har vi fått givet att det för något m gäller att:

$$kn = 101m + r \qquad (k+1)n = 101(m+1) + s$$

där r och s är resterna vid division med 101, som båda ligger mellan 0 och 100. Om vi subtraherar den första ekvationen från den andra så får vi att $n = 101 + s - r$, vilket ger att $s < r$ eftersom $n < 101$.

Lösning 2

Man kan se det som att vi har ett tal som från början är 0, och att vi sen upprepat adderar $n < 101$ till vårt tal. Vi upprepar detta 100 gånger, och frågan är hur många gånger resten av vårt tal vid division med 101 minskar. Nyckelinsikten från lösning 1 kan med detta sätt att tänka formuleras på följande vis:

Resten minskar om och endast om vi passerar en multipel av 101.

Vi ser att detta stämmer eftersom:

- Om vi inte passerar en multipel av 101 kan resten inte minska, eftersom vi inte ökar kvoten och alltså bara adderar n till resten.
- Om vi passerar en multipel av 101 så ökar kvoten med exakt 1 eftersom $n < 101$. Alltså gäller att om resten innan vi adderade var x så kommer den nya resten bli $x + n - 101 < x$.

Eftersom vi aldrig kan passera två multiplar av 101 på en gång (då $n < 101$), så får vi att antalet gånger vi minskar är lika med antalet multiplar av 101 som är mindre än $100 \cdot n$, det vill säga

$$\left\lfloor \frac{100 \cdot n}{101} \right\rfloor = \left\lfloor n - \frac{n}{101} \right\rfloor = n - 1$$

vilket är vårt svar.

Lösning 3

Notera att eftersom 101 är ett primtal, så har alla talen olika rester vid division med 101 (om $a \cdot n$ och $b \cdot n$ hade samma rest så skulle $(a-b) \cdot n$ vara delbart med 101, men det är inte möjligt om $a \neq b$ eftersom de båda är mindre än 101). Eftersom det finns 101 tal och 101 möjliga rester $(0, 1, 2, ..., 100)$ så kommer varje rest förekomma exakt en gång.

Notera vidare att om det *högra* talet i ett par har rest r, så kommer det vänstra talet i paret ha rest $r - n < r$ eller $r - n + 101 > r$, beroende på om r är mindre än n (en mer nogrann motivering till detta ser ut ungefär som i tidigare lösningar). Alltså vet vi att ett tal r i raden av rester som står till höger i ett par är mindre än talet till vänster om och endast om $r < n$, det vill säga om r är något av talet $0, 1, 2, ..., n - 1$. Vi vet att alla tal förekommer exakt en gång i raden, men att 0 står längst till vänster, så svaret är $n - 1$.

Problem 7

På tavlan står talen $1, 2, 3, ..., 1000$. Kevin väljer ut 12 av dem, och suddar ut resten. Därefter noterar han att ingen summa av några tal som är kvar på tavlan är ett potenstal. Är detta möjligt?

Lösning

Det är enkelt att kolla att 79 är ett primtal. Låt oss nu välja talen

$$1 \cdot 79, 2 \cdot 79, ..., 12 \cdot 79$$

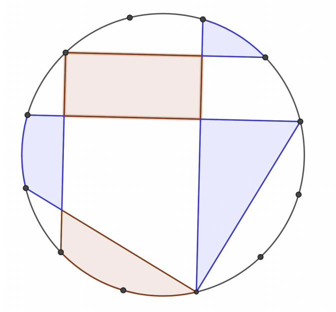
Detta är 12 stycken tal och det största av dem är $12 \cdot 79 = 948 < 1000$, så de stod alla på tavlan från början. Deras summa är

$$\begin{aligned} 1 \cdot 79 + 2 \cdot 79 + ... + 12 \cdot 79 &= 79 \cdot (1 + 2 + ... + 12) \\ &= 79 \cdot \frac{12(12+1)}{2} \\ &= 79 \cdot 78 \end{aligned}$$

Varje summa av några av dessa tal måste vara delbar med 79, eftersom varje tal är delbart med 79. Men ingen summa av några av talen kan vara delbar med 79^2, eftersom summan av *alla* tal är $79 \cdot 78 < 79^2$. Eftersom 79 är ett primtal, så följer det att ingen summa kan vara ett potenstal (om ett primtal delar ett potenstal n^k så måste det dela potenstalet minst $k \geq 2$ gånger, men vi har just visat att primtalet 79 delar varje summa av några av talen *exakt* en gång), så vi är klara!

Problem 8

Bevisa att summan av areorna av de blå områdena är samma som summan av areorna av de röda områdena. Figuren är en cirkel och punkterna på omkretsen är jämnt utspridda.

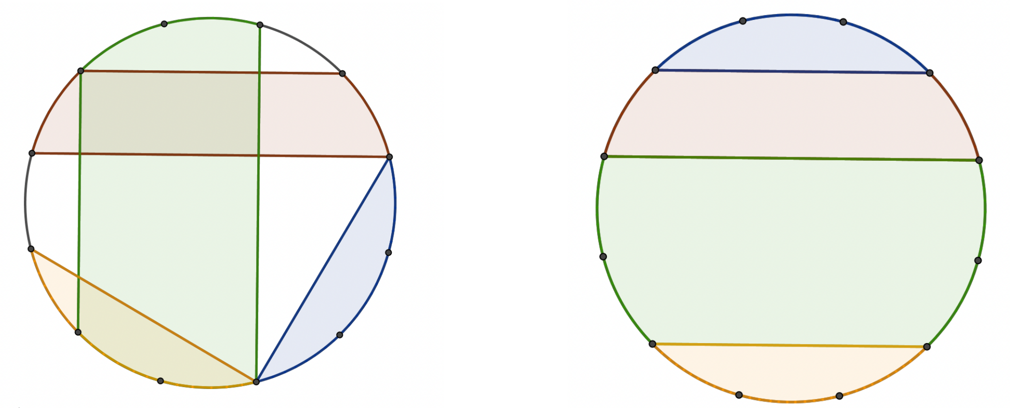


Lösning 1

I den vänstra bilden nedan har fyra bitar av cirkeln färgats i fyra olika färger, som sedan arrangerats om i den högra bilden så att de precis täcker hela cirkeln utan överlapp. Notera att:

- röda områden i den ursprungliga bilden (se uppgiftsformuleringen ovan) motsvarar exakt de områden där bitarna i den vänstra bilden nedan överlappar
- blå områden i den ursprungliga bilden (se uppgiftsformuleringen ovan) motsvarar exakt de områden som bitarna i den vänstra bilden nedan inte täcker alls

Men de överlappande områdena och de områden som inte täcks alls i den vänsta bilden nedan måste ha samma area, eftersom de 4 bitarna tillsammans har exakt samma area som cirkeln. Därmed har vi bevisat påståendet i uppgiften.



Lösning 2

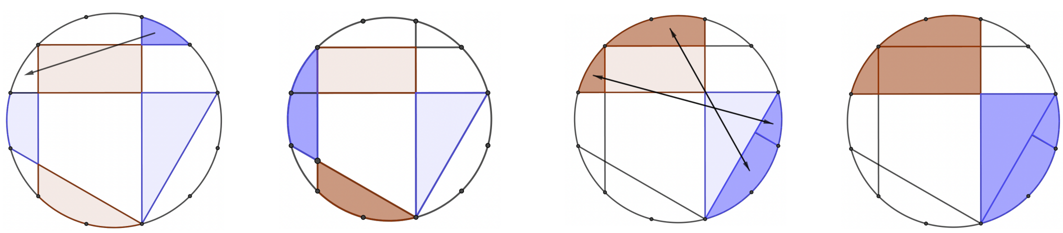
En annan lösning fås genom att ”klippa och klistra” med bitarna som i de fyra bilderna nedan. Eftersom den röda och blåa biten är lika stora i sista bilden, måste de varit det från början.

Bild 1 Flytta den mörkblå biten uppe i höger hörn längs med pilen.

Bild 2 Den mörkröda och mörkblåa biten är lika stora, så vi kan ta bort dem.

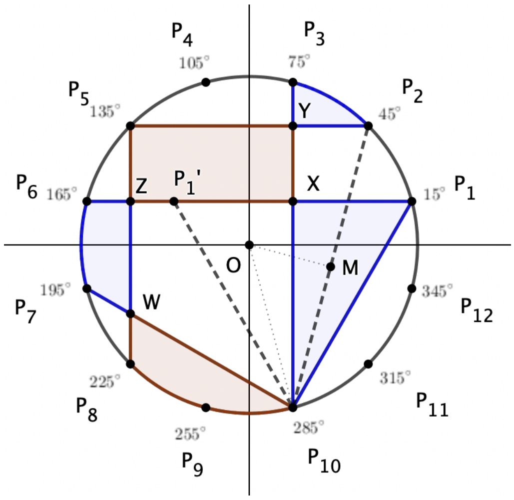
Bild 3 De mörkröda bitarna är lika stora som motsvarande mörkblåa bitar, så vi kan lägga till dem.

Bild 4 Den mörkröda och mörkblåa biten är lika stora, så vi kan ta bort dem.



Lösning 3

Det går också att lösa uppgiften genom att helt enkelt räkna ut areorna (eller genom att kombinera vissa insikter från lösning 2 med att räkna ut de kvarvarande areorna). Vi visar här hur man kan räkna ut arean av den stora blåa triangeln och den stora röda rektangeln på två olika sätt (genom att uttrycka koordinaterna med trigonometri, samt genom att räkna ut vissa längder och vinklar), och därmed visa att de är lika stora. Tillsammans med observationerna i bild 1 och bild 2 från lösning 2 ger detta en fullständig lösning, men det är också möjligt att använda metoderna här för att räkna ut alla areor.



I bilden till vänster har punkterna på cirkeln namngetts som $P_1, ..., P_{12}$, cirkelns medelpunkt som O, samt några skärningspunkter inne i cirkeln som X, Y, Z och W. Vidare har vi placerat bilden i ett koordinatsystem där O är origo, och axlarna har ritats ut så att de är parallella med P_1P_6 respektive P_4P_9. Vi kan anta att bilden har skalats så att radien på cirkeln är 1, så det är alltså enhetscirkeln. Vinkeln mellan OP_i och $x-$axeln har markerats ut för punkterna $P_1, ..., P_{12}$.

Vi har också ritat ut ytterligare två punkter: P_1' som är speglingen av P_1 i X, samt M som är mittpunkten på P_2P_{10}.

Trigonometrisk lösning: Koordinaterna för punkterna P_i samt X, Y, Z är (alla vinklar är i grader):

- $P_i : (\cos(30i - 15), \sin(30i - 15))$, enligt definitionen för cosinus och sinus
- $X : (\cos(75), \sin(15))$, då $x-$koordinaten är samma som för P_3 och $y-$koordinaten som för P_1
- $Y : (\cos(75), \sin(45))$, då $x-$koordinaten är samma som för P_3 och $y-$koordinaten som för P_2
- $Z : (\cos(135), \sin(15))$, då $x-$koordinaten är samma som för P_5 och $y-$koordinaten som för P_1

Därmed har den blåa triangeln area (eftersom P_1X är vinkelrät mot $P_{10}X$)

$$\begin{aligned}
\frac{|P_1X| \cdot |P_{10}X|}{2} &= \frac{(\cos(15) - \cos(75)) \cdot (\sin(15) - \sin(285))}{2} \\
&= \frac{(\cos(15) - \sin(15)) \cdot (\sin(15) + \cos(15))}{2} \\
&= \frac{\cos^2(15) - \sin^2(15)}{2} \\
&= \frac{1 - 2\sin^2(15)}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2(15)
\end{aligned}$$

där vi använt att $\sin(285) = -\cos(15)$ och att $\cos(75) = \sin(15)$ i det första steget, konjugatregeln i det andra steget och den trigonometriska formeln $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ i det sista steget. Den röda rektangeln har area (eftersom XZ är vinkelrät mot XY)

$$\begin{aligned}
|XY| \cdot |XZ| &= (\sin(45) - \sin(15)) \cdot (\cos(75) - \cos(135)) \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin(15)) \cdot (\sin(15) + \frac{1}{\sqrt{2}}) \\
&= \frac{1}{2} - \sin^2(15)
\end{aligned}$$

där vi använt att $\cos(75) = \sin(15)$ och att $\sin(45) = \cos(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i första steget. Alltså har den röda rektangeln och den blåa triangeln samma area. Vi kan visa att övriga areor också är samma för blå och röd (genom liknande beräkningar eller genom observationerna från lösning 2).

Lösning genom att räkna ut längder och vinklar: Vi börjar med att räkna ut arean av den blåa triangeln. Notera att $\angle P_1OP_{10} = 90°$, eftersom cirkelbågen från P_1 till P_{10} upptar exakt en fjärdedel av cirkeln. Vidare är $|P_1O| = |P_{10}O| = 1$ eftersom båda är radier i cirkeln, så Pythagoras sats ger att $|P_1P_{10}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Notera nu att

$$\angle XP_1P_{10} = \angle P_6P_1P_{10} = \frac{285° - 165°}{2} = 60°$$

enligt medelpunktsvinkelsatsen (som säger att en randvinkel i en cirkel är hälften av motsvarande medelpunktsvinkel). Det innebär att $P_{10}X$ är höjd i en liksidig triangel med hörn i P_1, P_{10} och speglingen P_1' av P_1 i X, och alltså delar sidan P_1P_1' på mitten. Det ger att

$$|P_1X| = \frac{|P_1P_1'|}{2} = \frac{|P_1P_{10}|}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Till sist får vi (eftersom $P_{10}X$ är vinkelrät mot P_1X) med Pythagoras sats att

$$|P_{10}X| = \sqrt{|P_1P_{10}|^2 - |P_1X|^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Alltså är arean av den blåa trianglen

$$\frac{|P_1X| \cdot |P_{10}X|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Vi räknar nu ut arean av den röda rektangeln. Notera att $|P_2Y| = |P_5Z| = |XY|$ av symmetriskäl, säg att de alla är lika med t. Vidare är $\frac{|P_2P_{10}|}{2} = |P_2M| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eftersom OMP_2 bildar en rätvinklig triangel som är hälften av en liksidig, där M är mittpunkten på P_2P_{10} (argumentet är samma som vi använt tidigare för P_1XP_{10}, där vi nu noterar att $\angle P_{10}OP_2 = 120°$). Vi vet redan att $|P_{10}X| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, så Pythagoras sats i triangeln P_2YP_{10} ger nu att

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + t\right)^2 + t^2 = (\sqrt{3})^2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad 2t^2 + \sqrt{6}t + \frac{3}{2} = 3 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{-\sqrt{3}+3}{2\sqrt{2}}$$

där vi använder $pq-$formeln i sista steget. Vidare är $|P_2P_5| = |P_1P_{10}| = \sqrt{2}$ av symmetriskäl (vi räknade ut $|P_1P_{10}|$ tidiagre), så vi får nu att

$$|P_5Y| = |P_5P_2| - |P_2Y| = \sqrt{2} - \frac{-\sqrt{3}+3}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

där vi använder att $|P_2Y| = t = \frac{-\sqrt{3}+3}{2\sqrt{2}}$. Alltså är arean av den röda rektangeln

$$\begin{aligned} |P_5Y| \cdot |XY| &= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{3}+3}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{-\sqrt{3}+3-3+3\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Så den blå triangeln och den röda rektangeln har samma area. Vi kan visa att övriga areor också är samma för blå och röd (genom liknande beräkningar eller genom observationerna från lösning 2).

Anmärkning 1: Dessa två lösningar ger oss ett sätt att räkna ut $sin(15)$ då vi vet att arean av till exempel den blå triangeln kan uttryckas på två sätt:

$$\frac{1}{2} - sin^2(15) = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Longrightarrow \quad sin(15) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Det lämnas som övning åt läsaren att också visa att

$$sin(15) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Anmärkning 2: För den som inte fått nog av olika sätt att lösa denna uppgift kan man försöka visa att den blåa triangeln och den röda rektangeln har samma area genom att utnyttja att $|P_2Y| \cdot |P_5Y| = |P_3Y| \cdot |P_{10}Y|$ enligt kordasatsen, tillsammans med några observationer om sträckor som är lika långa av symmetriskäl.

Problem 9

Sara delar in talen $404, 405, ..., n$ i två grupper. Varje tal måste vara med i exakt en av grupperna, och grupperna får lov att vara olika stora. Därefter försöker Anton hitta tre tal x, y, z som är i *samma* grupp så att $x + y = z$. Vilket är det minsta positiva heltalet n sådant att Anton kan göra detta, oavsett hur Sara delade in talen i två grupper?

Lösning

Svaret är 2023. I allmänhet kan vi ställa samma fråga som i uppgiften, fast med talet 404 utbytt mot m. Då är svaret $n = 5m+3$, vilket är vad vi kommer visa här (eftersom det faktiskt blir enklare att följa lösningen i det generella fallet). Vi kommer kalla de två grupperna för den röda gruppen och den blåa gruppen, och tänka på det som att vi färglägger talen röda och blåa.

$\mathbf{5m + 3}$ funkar:

Vi använder oss av motsägelsebevis. Anta att $5m + 3$ inte funkar, det vill säga att det finns en indelning av talen $m, m + 1, ..., 5m + 3$ i en röd och en blå grupp så att det *inte* finns tre olika tal x, y, z som både har samma färg och är sådana att $x + y = z$. Det ger att:

$$\text{Om två olika tal } x, y \text{ har samma färg, så måste } x + y \text{ ha den andra färgen.} \qquad (*)$$
$$\text{Om två olika tal } x > y \text{ har samma färg, så måste } x - y \text{ ha den andra färgen.} \qquad (**)$$

Vi ska visa att dessa två observationer ger en motsägelse (och därmed att antagandet att $5m + 3$ inte funkar måste vara falskt, vilket avslutar beviset). Anta att m är röd. Vi kollar på fyra fall:

Fall 1 Anta att $m + 1$ och $m + 2$ båda är röda. Då ger $(*)$ att $2m + 1 = m + (m + 1)$ måste vara blå. Genom att upprepat använda $(*)$ på liknande sätt får vi:

m	$m+1$	$m+2$	$2m+1$	$2m+2$	$3m+2$	$4m+3$	$5m+3$

Notera att $(4m + 3) - (m + 1) = 3m + 2 = (5m + 3) - (2m + 1)$. Den första likheten ger att $3m+2$ måste vara blå enligt $(**)$. Den andra ger att $3m+2$ måste vara röd, igen enligt $(**)$. Det är en motsägelse.

Fall 2 Anta att $m + 1$ är röd och $m + 2$ är blå. På liknande sätt som i fall 1 får vi från $(*)$ att:

m	$m+1$	$m+2$	$2m+1$	$2m+2$	$3m+3$	$4m+3$

Till sist ger $(3m+3)-(m+1) = 2m+2$ att $2m+2$ är blå och $(4m+3)-(2m+1) = 2m+2$ att $2m + 2$ är röd, båda enligt $(**)$. Motsägelse.

Fall 3 Anta att $m + 1$ är blå och $m + 2$ är röd. På liknande sätt som i fall 1 får vi från $(*)$ att:

m	$m+1$	$m+2$	$2m+1$	$2m+2$	$3m+3$	$4m+3$

Till sist ger $(3m+3)-(m+2) = 2m+1$ att $2m+1$ är blå och $(4m+3)-(2m+2) = 2m+1$ att $2m + 1$ är röd, båda enligt $(**)$. Motsägelse.

Fall 4 Anta att $m + 1$ och $m + 2$ båda är blåa. På liknande sätt som i fall 1 får vi från $(*)$ att:

m	$m+1$	$m+2$	$2m+1$	$2m+3$	$3m+3$	$4m+4$

Till sist ger $(3m+3)-(m+2) = 2m+1$ att $2m+1$ är röd och $(4m+4)-(2m+3) = 2m+1$ att $2m + 1$ är blå, båda enligt $(**)$. Motsägelse.

I alla fyra fall fick vi en motsägelse. Därmed har vi visat att $5m + 3$ funkar.

$\mathbf{5m + 2}$ funkar inte:

Vi färgar $m, m+1, ..., 2m$ samt $4m+3, 4m+4, ..., 5m+2$ röda och $2m+1, 2m+2, ..., 4m+2$ blåa:

m	$m+1$	$\cdots$	$2m$	$2m+1$	$\cdots$	$4m+2$	$4m+3$	$\cdots$	$5m+1$	$5m+2$

Om vi tar två olika röda tal x och y så kan summan $x + y$ aldrig vara röd, eftersom:

- Om x och y båda är mellan m och $2m$ så är deras summa minst $2m + 1$ och max $4m - 1$, så summan är garanterat blå.
- Annars är minst en av x och y större än eller lika med $4m + 3$, men då är deras summa minst $5m + 3$, vilket är större än alla tal vi bryr oss om.

Om vi tar två olika blåa tal x och y så är deras summa $x + y$ minst $(2m + 1) + (2m + 2) = 4m + 3$, så den måste vara röd.

Alltså går det att dela in talen $m, m+1, ..., 5m+2$ i två grupper så det inte finns x, y, z med samma färg så att $x + y = z$. Så $5m + 2$ funkar inte.

Problem 10

Låt k vara ett positivt heltal, och låt S vara en mängd som innehåller $2^k + 1$ olika positiva heltal. Vi kallar ett primtal *snällt* om det delar summan av två (olika) tal i S. Visa att det finns minst $k + 1$ *snälla* primtal.

Lösning

För ett primtal p och ett heltal a så skriver vi $v_p(a)$ för antalet gånger som p delar a (alltså för exponenten av p i primtalsfaktoriseringen av a). Till exempel så är

$$v_2(20) = 2, \quad v_3(20) = 0, \quad v_5(20) = 1$$

En mängd S av positiva heltal sägs vara $p-$*enkel* om

$$v_p(a + b) = \min(v_p(a), v_p(b)) \tag{$*$}$$

för alla tal a och b i mängden som är olika. Notera att det alltid är sant att

$$v_p(a + b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$$

eftersom både a och b delas av p minst $\min(v_p(a), v_p(b))$ gånger, och alltså gör även deras summa det. Vidare kan det aldrig gälla att $v_p(a + b)$ och $v_p(b)$ båda är större än $v_p(a)$, eftersom a måste delas av $gcd(a + b, b)$. Alltså har vi likhet $v_p(a + b) = \min(v_p(a), v_p(b))$ om $v_p(a) \neq v_p(b)$.

Lemma: Anta att $p \geq 3$ är ett primtal, och $a_1, a_2, ..., a_n$ är n olika heltal. Det går då alltid (oberoende av p och $a_1, ..., a_n$) att välja minst $\frac{n}{2}$ av dessa heltal så att de bildar en $p-$enkel mängd.

Bevis: Låt $a_i = p^{\alpha_i} b_i$, där $\alpha_i = v_p(a_i)$ (så p delar inte b_i). Alltså är $b_i \equiv r_i \pmod{p}$ för något r_i bland talen $\pm 1, \pm 2, ..., \pm\frac{p-1}{2}$. Antingen är minst hälften av talen $r_1, r_2, ..., r_n$ negativa eller så är minst hälften postitiva. Vi kan därför välja minst $\frac{n}{2}$ stycken a_i så att motsvarande r_i alla har samma tecken. Då gäller för två av dessa a_i och a_j att:

- Om $v_p(a_i) \neq v_p(a_j)$ så uppfylls ($*$) av a_i och a_j
- Om $\alpha_i = v_p(a_i) = v_p(a_j) = \alpha_j$ så gäller $a_i + a_j = p^{\alpha_i}(b_i + b_j)$ där $b_i + b_j \equiv r_i + r_j \not\equiv 0 \pmod{p}$ eftersom $1 \leq |r_i|, |r_j| \leq \frac{p-1}{2}$ och de båda har samma tecken. Alltså delas $a_i + a_j$ av p exakt $\alpha_i = \alpha_j$ gånger, så ($*$) uppfylls.

Med andra ord har vi visat att dessa a_i bildar en $p-$enkel mängd av storlek minst $\frac{n}{2}$. $\square$

Anta nu att påståendet i uppgiften inte är sant. Då finns det som mest k snälla primtal, säg $p_1, p_2, ..., p_k$. Vi vet att 2 måste vara snällt eftersom det finns minst 3 tal i S (det måste finnas antingen 2 jämna eller 2 udda tal, så det finns en jämn summa av två tal). Alltså är $p_1 = 2$.

Enligt lemmat så har vi följande:

- S har en delmängd S_{k-1} med $2^{k-1} + 1$ stycken tal som är p_k-enkel
- S_{k-1} har en delmängd S_{k-2} med $2^{k-2} + 1$ stycken tal som är $p_{k-1}-$enkel
- ...
- S_2 har en delmängd S_1 med $2^1 + 1 = 3$ stycken tal som är p_2-enkel

Säg att mängden S_1 består av talen a, b, c. Vi vet (enligt vårt ursprungliga antagande) att $a + b$ endast delas av primtalen $p_1 = 2, p_2, p_3, ..., p_k$, eftersom det är en summa av två tal från S, så vi kan skriva $a + b = 2^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$ för några heltal $\alpha_1, ..., \alpha_k$. Samtidigt vet vi att a, b, c ligger i S_i för alla $i = 1, 2, ..., k - 1$. Alltså är $\{a, b, c\}$ en p_i-enkel mängd för alla $i = 2, 3, ..., k$, vilket innebär att om $a + b$ delas av p_i exakt α_i gånger, så måste både a och b delas av p_i minst α_i gånger. Det ger att

$$\frac{a}{p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}} + \frac{b}{p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}} = 2^{\alpha_1}$$

där vänsterledet är en summa av två heltal som båda är mindre än 2^{α_1} och alltså delas av 2 som mest $\alpha_i - 1$ gånger. Men det innebär att om vi sätter in talen a, b i ($*$) för primtalet 2, så kan likhet inte gälla, och alltså kan vi inte ha $v_2(a) \neq v_2(b)$ enligt observationerna vi gjorde innan lemmat. Det följer att $v_2(a) = v_2(b) = v_2(c)$, låt säga att de alla är lika med g. Vi delar med 2^g och får

$$\frac{a}{2^g \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}} + \frac{b}{2^g \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}} = 2^{\alpha_1 - g}$$

vilket är en summa av två *olika* udda tal som alltså måste vara minst 4. Därmed är $\alpha_1 - g \geq 2$, vilket ger att $a/2^g + b/2^g$ är delbart med 4. På samma sätt är $a/2^g + c/2^g$ och $b/2^g + c/2^g$ delbara med 4. Men nu har vi tre udda tal $a/2^g, b/2^g$ och $c/2^g$ sådana att alla möjliga summor av två av dem är delbar med 4. Detta är omöjligt, så vi har fått en motsägelse, och är därmed klara!

Problem 11

I landet långt borta pågår en kamp mellan två lag - det röda laget och det blåa laget. Landet består av n stycken städer. Vissa par av städer är hopkopplade med vägar. I början tillhör vägarna inte något av lagen. De turas sen om att välja en väg som inget av lagen hittills valt, och färgar den med sin egen färg. Det röda laget väljer först.
Om det vid något tillfälle är möjligt att längs med endast blåa vägar resa mellan alla par av städer, så vinner det blåa laget (notera att man får lov att använda flera vägar för att resa mellan två städer, så länge de alla är blåa). Om alla vägar valts (av något lag) utan att blåa laget har uppnått detta än, så vinner det röda laget.
Visa att det blåa laget kan garantera en vinst om och endast om det går att dela in vägarna i två olika grupper, så att det inom varje grupp går att ta sig mellan varje par av städer.

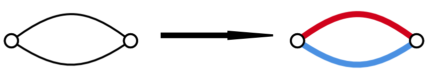
Lösning

Vi kommer betrakta landet som en graf, där vi kallar städerna för noder och vägarna för kanter. Om det går att ta sig mellan alla par av noder genom att bara resa längs med kanterna i en viss grupp, så säger vi att den gruppen kanter är *uppspännande*. En grupp kanter är (per definition) uppspännande om grafen med endast dessa kanter är sammanhängande. Vi har två saker att visa.

Kanterna kan delas i två uppspännande grupper $\implies$ Blå laget kan garantera en vinst

Anta att kanterna kan delas in i två uppspännande grupper. Vi visar med induktion på antalet noder att det blåa laget kan garantera en vinst. I vår induktion kommer vi tillåta att det finns flera kanter mellan samma par av noder (vi tillåter alltså mer generella fall).

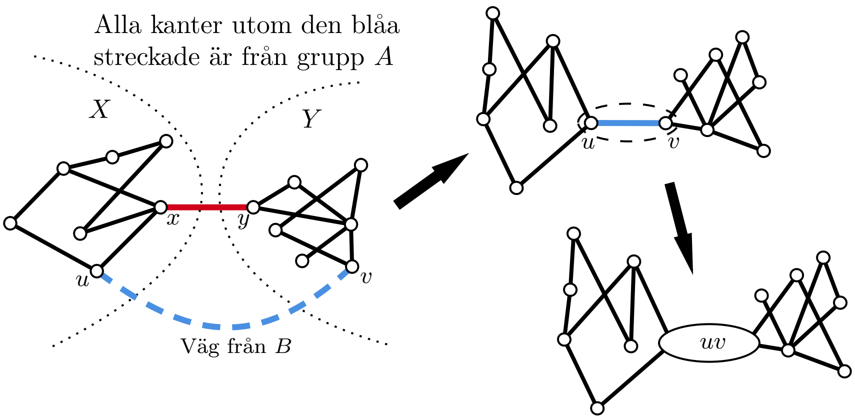
Basfall: Det finns $n = 2$ noder. Enda sättet som det kan gå att dela in kanterna i två uppspännande grupper är om det finns minst två olika kanter mellan noderna.



I detta fall vinner givetvis blåa laget: röd väljer först en av kanterna, varpå blå väljer den andra (och ser därmed till att man kan resa mellan noderna via en blå kant).

Induktionssteg: Enligt antagandet kan vi dela in kanterna i två uppspännande grupper, säg grupp A och grupp B. Det röda laget gör första draget. Låt säga att de färgar en kant i grupp A som går mellan nod x och nod y. Grafen som bara innehåller kanterna från grupp A är sammanhängande, så om vi tar bort kanten mellan x och y delas den i som mest två olika komponenter - säg att X är komponenten som innehåller x och Y är komponenten som innehåller y. Men grafen som endast innehåller kanterna från grupp B är också sammanhängande, och måste alltså ha en kant som går mellan en nod u i X och en nod v i Y (notera att X och Y tillsammans innehåller *alla* noder i grafen).

I bilden längst till vänster nedan har det som beskrivits hittills ritats upp. De heldragna kanterna är alla kanter från grupp A. Om röda kanten xy tas bort delas grafen i två komponenter X och Y. Vidare finns det en kant uv i grupp B som går mellan X och Y (blå och streckad på bilden).



Låt nu blåa laget välja kanten uv (från grupp B), som syns i bilden uppe till höger (i denna bild är alla kanter från A utom xy utritade, samt kanten uv från B). Vi kan betrakta nod u och v som en och samma nod, ta bort kanten mellan dem och låta alla kanter som går från någon av dem till en tredje nod w nu gå från noden uv till noden w (detta är utritat i bilden nere till höger). Vi får då en graf med $n-1$ noder. Kanterna i grupp A *utan* xy är uppspännande för denna graf eftersom u var i X och v var i Y. Kanterna i B är givetvis också uppspännande för denna graf. Med andra ord kan den blåa laget vinna i denna graf, enligt induktionsantagandet. Men det innebär att blå kan spela så att man i ursprungliga grafen via endast blåa kanter kan ta till sig till u eller v från vilken nod som helst, och i första draget valde blåa laget kanten uv så då kan man ta sig mellan alla par av noder via blå kanter. Alltså vinner blå även i den ursprungliga grafen, vilket skulle visas.

Blå laget kan garantera en vinst $\implies$ Kanterna kan delas i två uppspännande grupper

Vi ska visa att det går att dela in kanterna i två uppspännande grupper. Låt det röda laget "sno" det blåa lagets strategi, genom att:

1. I första draget välja en kant (vilken som helst).
2. I alla följande drag låtsas som att den första kanten som valdes inte blivit vald än, och spela som det blåa laget skulle gjort i motsvarande situation (notera att eftersom de låtsas som att första draget aldrig gjordes så blir det som om de vore det andra laget att göra ett drag).

Det enda som kan hindra dem från att spela exakt som blåa laget skulle gjort i motsvarande situation är om de vill välja den första kanten igen, trots att den redan är vald (de låtsas ju att den inte är vald än). I detta fall kan de välja en annan kant (vilken som helst), och i framtiden istället låtsas som att den kanten är den som inte blivit vald än.

Eftersom det blåa laget kan vinna (det vill säga garantera att kanterna i dess egen färg är en uppspännande grupp när alla kanter valts), så kan det röda laget genom att på detta vis kopiera det blåa lagets strategi garantera att de röda kanterna är en uppspännande grupp efter att alla kanter har valts. Men blå kan garantera att de blåa kanterna är en uppspännande grupp *i samma omgång av spelet* - eftersom detta enligt antagandet är möjligt oavsett hur röd spelar.

Därmed har vi visat att det går att dela in kanterna i två grupper (en röd och en blå) så att båda grupperna är uppspännande, vilket skulle visas.