Tyngdpunkten

Svårare - Facit

November 2024

1

Vi använder formeln för centripetalacceleration vid cirkelrörelse:

$$a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

där r är radien på cirkelbanan och T är periodtiden. Insättning av de givna värdena ger att $a_c \approx 175\,\mathrm{m/s^2}$. Detta är ca. 18 gånger större än tyngdaccelerationen g. Det är en ganska hög acceleration, så James Bond mår nog inte så bra!

2

När bollarna värms upp utvidgas de. För bollen som ligger på bordet betyder det att alla partiklar i bollen (alternativt: bollens masscentrum) flyttas *uppåt*, varvid bollens potentiella energi *ökar*. För bollen som hänger i snöret kommer uppvärmningen ha motsatt effekt: partiklarna i bollen förflyttas *nedåt*, varvid bollen får *lägre* potentiell energi. Enligt lagen om energins bevarande måste därför bollen som hänger i snöret bli varmare. Dock är denna effekt troligen ganska liten :)

3

Vi börjar med att använda Newtons gravitationslag för att bestämma tyngdaccelerationen vid månens yta: $g_{moon} = F_g/m$, där F_g är tyngdkraften på ett objekt med massa m. Vi har att

$$F_g = G\frac{mM}{R^2},$$

där G är Newtons gravitationskonstant, M är Månens massa och R är Månens radie. Alltså är

$$g_m = \frac{GM}{R^2} \approx 1.62\,\mathrm{m/s^2}.$$

Nu använder vi formeln för kastlängd, som säger att ett objekt som kastas från marknivå med vinkeln α mot marken och utgångshastigheten v flyger sträckan $l = \frac{v^2}{g}\sin(2\alpha)$. Det innebär att kvoten mellan kastlängderna blir:

$$\frac{l_{moon}}{l_{earth}} = \frac{g_{earth}}{g_{moon}} \approx 6.1.$$

Detta är svaret!

4

Vik ihop ett eller flera papper till en ”kloss”. Skapa även ett lutande plan av papper. Använd gärna många papper eller en bok för att göra planet så platt och hårt som möjligt. Placera nu ”klossen” på det lutande planet. Låt planet vara horisontellt, och öka sedan lutningsvinkeln tills klossen precis börjar glida ned för planet. Kalla vinkeln då klossen börjar glida för α. Friktionskoefficienten ges då av $\mu = \tan\alpha$ (detta följer direkt av kraftjämvikten för klossen i gränsfallet precis innan den börjar glida).

5

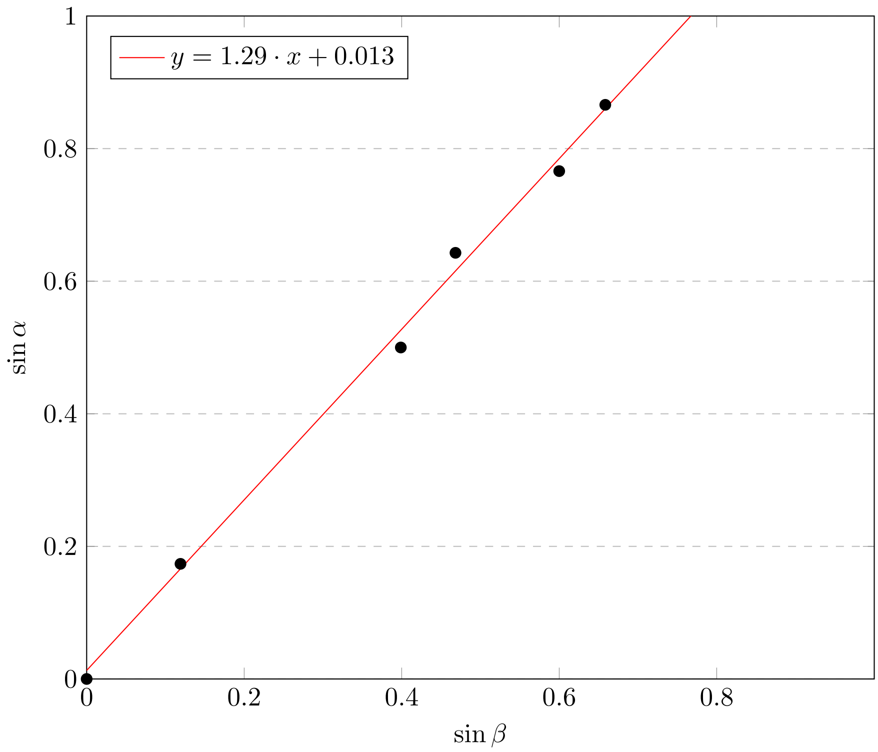
Snells lag ger oss att $\sin\alpha = n\sin\beta$ (eftersom vi antagit att luftens brytningsindex är 1). Om vi plottar $\sin\alpha$ (på y-axeln) mot $\sin\beta$ (på x-axeln) kommer vi alltså att få en linje med lutningen n.

För att göra denna plott måste vi hitta en formel som relaterar $\sin\beta$ till x (som är given i tabellen). Enkel geometri ger att $\sin\beta = \sin(\arctan(\frac{x}{d}))$. Vi kan nu räkna ut ett värde på $\sin\beta$ för varje vinkel α.

I grafen syns de erhållna datapunkterna samt regressionslinjen. Regressionslinjen har gjorts av en dator, men det går också bra att dra den med ögonmått! Vi ser att lutningen på linjen är ca. $n = 1.29$, vilket alltså är svaret!

Notera att man även kan lösa uppgiften genom att beräkna ett värde på n för varje given vinkel α enligt $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ och därefter ta medelvärdet av de erhållna värdena. Man får då ett liknande värde på vattnets brytningsindex.

Plott av $\sin\alpha$ mot $\sin\beta$ tillsammans med regressionslinjen.



6

Vi hittar först den totala resistansen (ersättningsresistansen) som vi måste koppla till spänningskällan för att få maximal effekt över resistorn. Om vi kopplar in en resistor med resistansen R ges effekten som utvecklas över resistorn av:

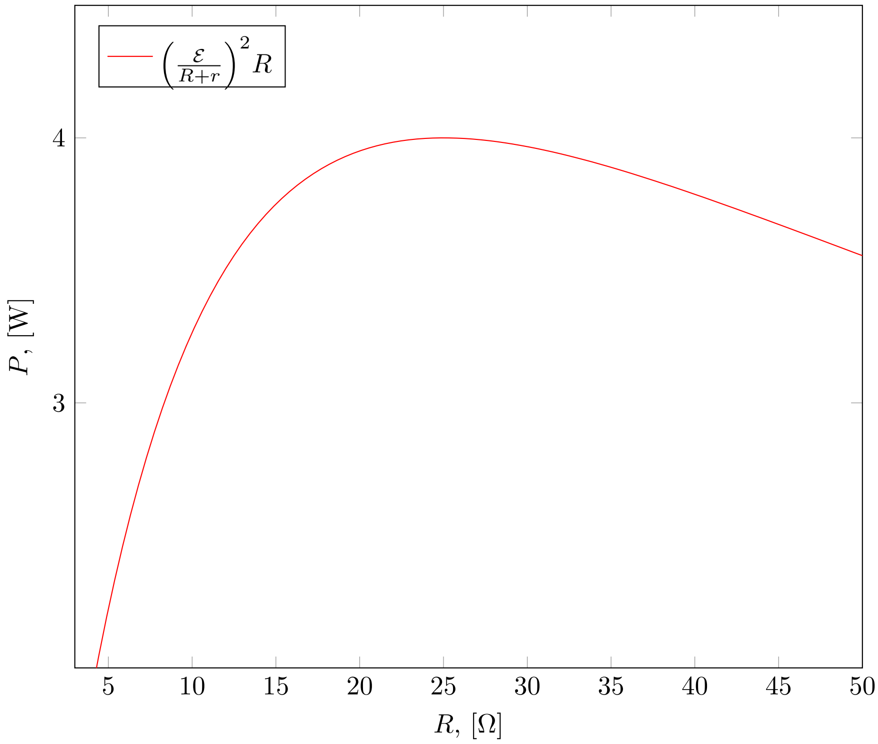
$$P = I^2R = \left(\frac{\mathcal{E}}{R+r}\right)^2 R,$$

där $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ är strömmen i kretsen.

Vi kan plotta detta uttryck för att hitta värdet på R som ger maximal effekt (se grafen)! Vi erhåller att maximal effekt utvecklas över resistorn då $R = r = 25\,\Omega$. Samma resultat kan förstås erhållas med derivering.

Nu är frågan hur vi ska sätta ihop de fyra givna resistorerna för att ersättningsresistansen ska vara $25\,\Omega$. Vi kan göra det genom att seriekoppla resistorerna $10\,\Omega$ och $40\,\Omega$ respektive resistorerna $20\,\Omega$ och $30\,\Omega$ för att få två resistorer med resistans $50\,\Omega$ vardera. Därefter parallellkopplar vi dessa. Detta är svaret!

Plott av effekten P som utvecklas i resistorn mot resistansen R.



7

Vi använder först Faradays induktionslag för att hitta den inducerade spänningen. Vi har att det magnetiska flödet genom slingan ges av $\Phi = AB = \pi r^2 B(t)$, så den inducerade spänningen blir: [1]

$$\mathcal{E}(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 (B_1 + 2B_2 t).$$

Slutligen ger Ohms lag att den inducerade strömmen blir:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\pi r^2 (B_1 + 2B_2 t)}{R}.$$

Detta är svaret!

8

Vi ritar en figur av pilbågen och pilen då pilen dragits ned ett avstånd x. Vi sätter ut spännkraften F som verkar på pilen (se Figur 1). Kraftresultanten kommer peka uppåt i figuren och ha storleken:

$$F_{res} = 2F \sin\alpha \approx 2F\alpha,$$

där vi använt approximationen $\sin\alpha \approx \alpha$ som gavs i uppgiften. Vi har även att $\frac{x}{l/2} = \tan\alpha \approx \alpha$, där vi återigen använt en approximation från ledtråden. Vi sätter in uttrycket för α i uttrycket för F_{res}, och får:

$$F_{res} = 4Fx/l.$$

Pilbågen fungerar alltså som en fjäder med fjäderkonstanten $k = \frac{4F}{l}$. Pilens potentiella energi i pilbågen i startläget ($x = h_0$) blir således: [2]

$$E_{spring} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{2F}{l}h_0^2.$$

[1] Vi struntar i tecken eftersom vi inte är intresserade av riktningen på strömmen.

[2] Detta uttryck kan tas fram med integration, men står garanterat i formelsamlingar.

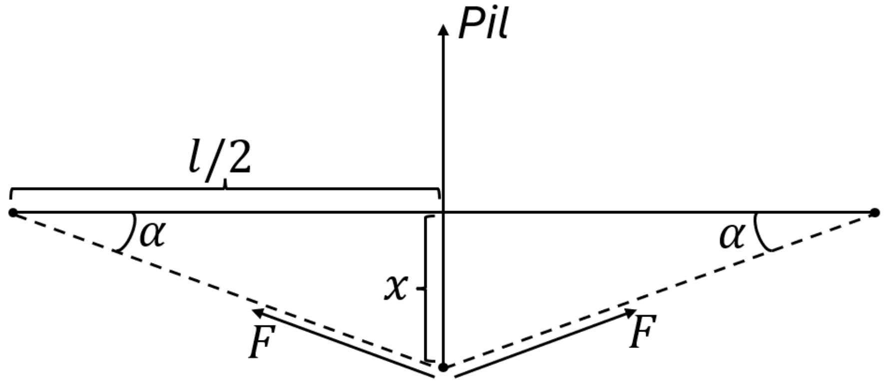
Vi använder nu energiekvationen ("lagen om energins bevarande") för att bestämma höjden som pilen når. Pilen börjar (i pilbågen) och slutar (högst upp i luften) i vila, så den potentiella energin i startläget måste vara lika stor som den potentiella energin i slutet, dvs:

$$\frac{2Fh_0^2}{l} = mgH.$$

Vi löser ut H och får:

$$H = \frac{2Fh_0^2}{mgl} \approx 6.4\,\mathrm{m}.$$

Detta är svaret!



Figur 1: En bild av pilbågen och pilen.

9

Vi börjar med *Ledning 1.* Att temperaturen inte ändras med tiden innebär att värmeflödet Φ inte beror på x! Om värmeflödet är större vid någon x-koordinat än vid en annan kommer det nämligen att totalt sett flöda in mer värme än det flödar ut i något område (eller tvärt om), vilket leder till att temperaturen där ökar (eller minskar).

Vi har alltså enligt Fouriers lag att $\Phi = -\lambda A \frac{dT}{dx}$ är konstant, så $\lambda \frac{dT}{dx}$ är konstant! Det innebär att temperaturen kommer att vara en linjär funktion av x, så länge λ inte ändras. Temperaturen kommer avta linjärt *i betongen* och *i snön.* Dock kommer linjerna *inte* ha samma lutning i taket som i snön (eftersom det är olika λ där).

Vi antar nu att snön har tjockleken Δx_s och bestämmer funktionen $T(x)$. Enligt ovan är produkten $\lambda \frac{dT}{dx}$ konstant; vi kallar den $\lambda \frac{dT}{dx} = C$. I taket gäller då: $\frac{dT}{dx} = \frac{C}{\lambda_t}$, vilket ger att $T(x) = \frac{C}{\lambda_t} x + B$, där B är någon konstant. I snön får vi på samma sätt att $T(x) = \frac{C}{\lambda_s} x + D$. Så temperaturen beror på x enligt följande:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{C}{\lambda_t} x + B, & \text{då } 0 \leq x \leq \Delta x_t \\ \frac{C}{\lambda_s} x + D, & \text{då } \Delta x_t \leq x \leq \Delta x_t + \Delta x_s \end{cases}.$$

Vi bestämmer de okända konstanterna genom att använda de kända värdena på temperaturen inomhus och utomhus. Vi använder även villkoret att $T(x)$ måste vara kontinuerlig i $x = \Delta x_t$ (dvs. i x-koordinaten där de två olika linjerna "möts"). Det vore väldigt orimligt och ofysikaliskt om temperaturen vore diskontinuerlig!

Villkoren blir:

$$\begin{cases} T(0) = T_i \\ T(\Delta x_t + \Delta x_s) = T_u \\ \frac{C}{\lambda_t} \Delta x_t + B = \frac{C}{\lambda_s} \Delta x_t + D \end{cases}.$$

Om vi sätter in uttrycket för $T(x)$ ovan får vi ett helt vanligt ekvationssystem i B, D och C. Vi löser (med lite algebra) ut B och C:

$$\begin{cases} B = T_i \\ C = -\frac{T_i - T_u}{\frac{\Delta x_t}{\lambda_t} + \frac{\Delta x_s}{\lambda_s}} \end{cases}.$$

Med hjälp av detta kan vi beräkna värdet på temperaturen invid taket:

$$T(\Delta x_t) = \frac{C}{\lambda_t}\Delta x_t + B = -\frac{T_i - T_u}{1 + \frac{\lambda_t \Delta x_s}{\lambda_s \Delta x_t}} + T_i.$$

Eftersom $T_i - T_u > 0$ kommer detta uttryck att växa med Δx_s. Det innebär att det blir varmare på utsidan av taket ju tjockare snölagret är - snön isolerar! Vi söker den tjocklek på snölagret Δx_s som ger $T(\Delta x_t) = 0$ (eftersom snön börjar smälta vid $0\,°\mathrm{C}$). Med lite beräkningar får vi att

$$\Delta x_s = -\frac{T_u}{T_i}\frac{\Delta x_t \lambda_s}{\lambda_t} \approx 3.6\,\mathrm{cm}.$$

Detta är svaret!

10

Vi ställer upp villkoret för kraftjämvikt på en liten luftkub med höjd Δh. Låt tvärsnittsarean på den lilla luftkuben vara S.

Vi har två krafter som verkar på luftkuben. För det första är det tyngdkraften $F_g = mg = \rho \Delta h S g$ nedåt, där ρ är luftens densitet på den betraktade höjden och $S\Delta h$ är luftkubens volym. För det andra har vi tryckkraften $F_t = -S\Delta p$ riktad uppåt. Här är Δp differensen mellan trycket på kubens övre del och trycket på kubens undre del. Minustecknet kommer från att $\Delta p < 0$ eftersom trycket *avtar* med höjden.

Eftersom luftkuben är i vila har vi kraftjämvikt (enligt Newtons 2:a lag). Alltså får vi $F_g = F_t$, dvs

$$\rho g \Delta h = -\Delta p.$$

Vi delar båda led med Δh och använder att $\frac{\Delta p}{\Delta h} \to \frac{dp}{dh}$ då $\Delta h \to 0$. Med detta får vi:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g.$$

För att komma vidare behöver vi använda ideala gaslagen! Vi vet ju att det för luftkuben gäller att

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

där V är luftkubens volym, m är dess massa, M är luftens molmassa och T är lufttemperaturen. Vi använder definitionen av densitet $\rho = m/V$ för att skriva om uttrycket:

$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

Vi sätter in detta i ekvationen ovan och får:

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{Mg}{RT}p.$$

Men detta är en enkel differentialekvation för $p(h)$! Den har lösningen:

$$p(h) = Ce^{-\frac{Mg}{RT}h}.$$

Om vi sätter in villkoret $p(0) = p_0$ får vi att lösningen blir:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}h}.$$

Detta är alltså svaret!