Tyngdpunkten

Lättare - Facit

November 2024

1

Vi använder lagen om den kinetiska energin: äpplets potentiella energi $E_p = mgh$ övergår i kinetisk energi $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Detta ger efter förkortning att $v = \sqrt{2gh} \approx 6.3\,\mathrm{m/s}$. Uppgiften kan förstås också lösas med formler för likformigt accelererad rörelse.

2

När bollarna värms upp utvidgas de. För bollen som ligger på bordet betyder det att alla partiklar i bollen (alternativt: bollens masscentrum) flyttas *uppåt*, varvid bollens potentiella energi *ökar*. För bollen som hänger i snöret kommer uppvärmningen ha motsatt effekt: partiklarna i bollen förflyttas *nedåt*, varvid bollen får *lägre* potentiell energi. Enligt lagen om energins bevarande måste därför bollen som hänger i snöret bli varmare. Dock är denna effekt troligen ganska liten :)

3

Uppgiften kommer från kursen Termodynamik SI1121 på KTH. En möjlig lösning (från facit i kursen) är följande. Anta att träden i skogen står i ett rutnät med $5\,\mathrm{m}$ mellan sig. Det innebär att ett träd tar upp ca. $25\,\mathrm{m}^2$, så vi har 0.04 träd per kvadratmeter.

Anta att Sveriges area är ca. $1500\,\mathrm{km} \times 500\,\mathrm{km}$. Det är rimligt att ca. 75% av ytan är skog, och ca. 10% av skogen är lövträd (som tappar sina blad). Uppskattningarna ger att det totala antalet lövträd i Sverige är ca. 2×10^9 st.

Nu uppskattar vi mängden potentiell energi som frigörs per träd. Anta att löven på trädet utgör en sfär med radie $5\,\mathrm{m}$. Det ger den totala arean löv per träd: $A = 4\pi \times (5\,\mathrm{m})^2 \approx 300\,\mathrm{m}^2$. Anta att löv väger som papper, dvs $50\,\mathrm{g/m}^2$. Slutligen antar vi att medelhöjden som ett löv faller är $10\,\mathrm{m}$. Det ger att den potentiella energin per träd blir: $E_p = mgh \approx 1500\,\mathrm{J}$.

Sammantaget blir den frigjorda potentiella energin: $E_p = 3 \times 10^{12}\,\mathrm{J}$.

Anmärkning: Detta motsvarar energiinnehållet i $7 \times 10^4\,\mathrm{l}$ bensin!

4

Eftersom vi bortser från friktionskrafter är det endast Arkimedeskraften som kommer att bromsa den stackars personen. Denna ges av:

$$F_A = \rho g V.$$

Vi använder nu lagen om den kinetiska energin. Vi har att den kinetiska energin är 0 både i startläget och i slutläget. Det innebär att arbetet som uträttats av Arkimedeskraften och tyngdkraften totalt är noll. Alltså gäller: $F_A H = mg(h + H)$, vilket förkortas till:

$$H = \frac{mgh}{F_A - mg}.$$

Insättning av värden ger att $H = 100\,\mathrm{m}$. Svaret är stort, så friktionen kan inte försummas!

5

Vik ihop ett eller flera papper till en ”kloss”. Skapa även ett lutande plan av papper. Använd gärna många papper eller en bok för att göra planet så platt och hårt som möjligt. Placera nu ”klossen” på det lutande planet. Låt planet vara horisontellt, och öka sedan lutningsvinkeln tills klossen precis börjar glida ned för planet. Kalla vinkeln då klossen börjar glida för α. Friktionskoefficienten ges då av $\mu = \tan\alpha$ (detta följer direkt av kraftjämvikten för klossen i gränsfallet precis innan den börjar glida).

6

Ideala gaslagen ger att produkten pV är konstant för bubblan. På djupet H är det totala trycket summan av atmosfärsstrycket p_{atm} och det hydrostatiska trycket: $p = p_{atm} + \rho g H$, där ρ är vattnets densitet. Vid vattenytan är trycket bara p_{atm}. Vi får för volymen V_{yta} av bubblan vid ytan att

$$V_{yta} = V\frac{p_{atm} + \rho g H}{p_{atm}} \approx 16\,\mathrm{mm}^3.$$

Detta är svaret.

7

Genom att rita en figur och använda Pythagoras sats får vi att planetens radie r uppfyller

$$(r + 1015)^2 = r^2 + 65610^2 \implies r = \frac{65610^2 - 1015^2}{2030} \approx 2\,120\,021\,\mathrm{m}$$

Enligt Newtons gravitationslag samt Newtons andra lag gäller har bollen accelerationen

$$a = \frac{GM}{r^2},$$

som kan antas vara konstant eftersom tornets höjd är liten i jämförelse med r och luftmotståndet försummas. Samtidigt gäller

$$s = \frac{at^2}{2} \implies a = \frac{2s}{t^2}$$

där s är sträckan som bollen faller och t är tiden det tar för bollen att falla. Vi får

$$\frac{2s}{t^2} = \frac{GM}{r^2} \implies M = \frac{2sr^2}{Gt^2} = 2.116 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}.$$

8

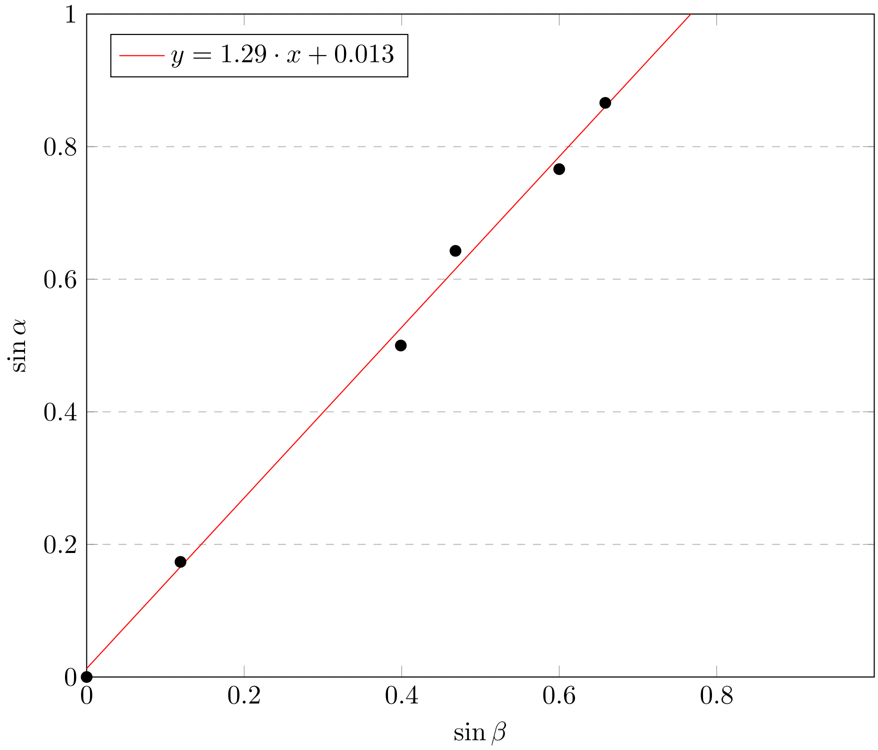
Snells lag ger oss att $\sin\alpha = n\sin\beta$ (eftersom vi antagit att luftens brytningsindex är 1). Om vi plottar $\sin\alpha$ (på y-axeln) mot $\sin\beta$ (på x-axeln) kommer vi alltså att få en linje med lutningen n.

För att göra denna plott måste vi hitta en formel som relaterar $\sin\beta$ till x (som är given i tabellen). Enkel geometri ger att $\sin\beta = \sin(\arctan(\frac{x}{d}))$. Vi kan nu räkna ut ett värde på $\sin\beta$ för varje vinkel α.

I grafen på nästa sida syns de erhållna datapunkterna samt regressionslinjen. Regressionslinjen har gjorts av en dator, men det går också bra att dra den med ögonmått! Vi ser att lutningen på linjen är ca. $n = 1.29$, vilket alltså är svaret!

Notera att man även kan lösa uppgiften genom att beräkna ett värde på n för varje given vinkel α enligt $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ och därefter ta medelvärdet av de erhållna värdena. Man får då ett liknande värde på vattnets brytningsindex.

Plott av $\sin\alpha$ mot $\sin\beta$ tillsammans med regressionslinjen.



9

Vi tänker oss först att vi fyller i det sfäriska hålet. Vi får då en homogen platta med volymladdningstäthet ρ (utan hål). Av symmetriskäl måste det elektriska fältet i punkten A nu vara 0: punkten A befinner sig i mitten av plattan, så det finns ingen föredragen riktning för fältet. Lite slarvigt sagt: varför skulle fältet vara riktat uppåt eller åt vänster och inte nedåt eller åt höger?

Hur ändrar vi fältet i A när vi lägger till sfären? Jo, vi lägger helt enkelt till sfärens fält till det tidigare fältet. Alltså måste (vektor)summan av det sökta elektriska fältet och sfärens fält vara 0! Det enda vi måste göra är att bestämma sfärens fält!

Sfärens fält beräknas enkelt med formeln som ges i *Ledning 1*:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{(\frac{h}{2})^2},$$

där vi använt att punkten A befinner sig på avståndet $r = \frac{h}{2}$ från den tillagda sfärens centrum. Enligt difinitionen av ρ får vi att

$$Q = V\rho = \frac{4\pi(\frac{h}{2})^3}{3}\rho,$$

där vi använt formeln för sfärens volym: $V = \frac{4\pi(\frac{h}{2})^3}{3}$. Alltså är det elektriska fältet som sfären genererar i punkten A:

$$E = \frac{h\rho}{6\epsilon_0}.$$

Det elektriska fältet som genereras av sfären är riktat rakt ut från sfärens centrum (enligt *Ledning 1*).

Det sökta fältet har enligt resonemanget ovan samma storlek och motsatt riktning som den tillagda sfärens fält. Svaret är alltså: det elektriska fältet i A har storleken $E = \frac{h\rho}{6\epsilon_0}$ och är riktat mot sfärens centrum, dvs. åt höger i figuren!

10

Vi hittar först den totala resistansen (ersättningsresistansen) som vi måste koppla till spänningskällan för att få maximal effekt över resistorn. Om vi kopplar in en resistor med resistansen R ges effekten som utvecklas över resistorn av:

$$P = I^2 R = \left(\frac{\mathcal{E}}{R+r}\right)^2 R,$$

där $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ är strömmen i kretsen.

Vi kan plotta detta uttryck för att hitta värdet på R som ger maximal effekt (se grafen)! Vi erhåller att maximal effekt utvecklas över resistorn då $R = r = 25\,\Omega$. Samma resultat kan förstås erhållas med derivering.

Nu är frågan hur vi ska sätta ihop de fyra givna resistorerna för att ersättningsresistansen ska vara $25\,\Omega$. Vi kan göra det genom att seriekoppla resistorerna $10\,\Omega$ och $40\,\Omega$ respektive resistorerna $20\,\Omega$ och $30\,\Omega$ för att få två resistorer med resistans $50\,\Omega$ vardera. Därefter parallellkopplar vi dessa. Detta är svaret!

Plott av effekten P som utvecklas i resistorn mot resistansen R.